

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования «Кабардино-Балкарский государственный университет  
им. Х.М. Бербекова» (КБГУ)

ИНСТИТУТ ФИЗИКИ И МАТЕМАТИКИ  
КАФЕДРА АЛГЕБРЫ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

СОГЛАСОВАНО

Руководитель образовательной  
программы \_\_\_\_\_ А.Х. Журтов  
« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2022 г.

УТВЕРЖДАЮ

Директор ИФ и М  
\_\_\_\_\_ Б.И. Кунижев  
« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2022 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ  
«ГРУППОВЫЕ СВОЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ»

(код и наименование дисциплины)

Направление подготовки

01.03.01 - Математика

(код и наименование направления подготовки)

Профиль подготовки

Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

(наименование профиля подготовки)

Квалификация (степень) выпускника

бакалавр

Форма обучения

очная

Нальчик 2022

Рабочая программа дисциплины «Групповые свойства дифференциальных уравнений» /сост. О.И. Бжеумихова – Нальчик: КБГУ, 2022. – 39 с.

Рабочая программа дисциплины для студентов очной формы обучения по направлению подготовки 01.03.01 Математика в 7 семестре, 4 курса.

Рабочая программа составлена с учетом Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 01.03.01 – Математика (уровень бакалавриата) утвержденного приказом Министерства образования и науки РФ от 10 января 2018 г. №8 (Зарегистрировано в Минюсте России 06 февраля 2018 г. № 49941).

## Содержание

1. Цель и задачи освоения дисциплины (модуля).....	3
2. Место дисциплины в структуре ОПОП ВО .....	3
3. Требования к результатам освоения дисциплины (модуля).....	3
4. Содержание и структура дисциплины (модуля).....	4
4.1. Содержание дисциплины (модуля).....	4
4.2. Структура дисциплины (модуля).....	5
4.3. Лекционные занятия.....	5
4.4. Практические занятия .....	5
4.5. Самостоятельное изучение разделов дисциплины .....	6
5. Оценочные материалы для текущего и рубежного контроля успеваемости и промежуточной аттестации .....	7
6. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности .....	19
7. Учебно-методическое обеспечение дисциплины .....	20
7.1. Нормативно-законодательные акты .....	20
7.2. Основная литература.....	21
7.5. Интернет-ресурсы .....	22
7.6. Методические указания по проведению различных учебных занятий, к курсовому проектированию и другим видам самостоятельной работы .....	24
8. Материально-техническое обеспечение дисциплины .....	32
Лист изменений (дополнений) в рабочей программе дисциплины .....	35
Приложение 1.....	36
Приложение 2.....	<b>Ошибка! Закладка не определена.</b>

## **1. Цель и задачи освоения дисциплины (модуля)**

Общая проблема исследования групповых свойств дифференциальных уравнений была поставлена и изучена еще во второй половине позапрошлого века норвежским математиком Софусом Ли. В дальнейшем этот раздел математики оказался менее востребованным в процессе общего развития теории дифференциальных уравнений. Это может быть объяснено следующим образом. Прежде всего оказывается, что “произвольная” система УЧП не допускает никакой тривиальной группы. Задача же отыскания нетривиальной группы для ОДУ оказывается равносильной задаче интегрирования самой системы. И наконец, вся теория групповых свойств дифференциальных уравнений ДУ является локальной теорией, мало пригодной для исследования конкретных прикладных задач с произвольными дополнительными условиями.

Вместе с тем имеется целый ряд вопросов, в которых эта теория оказывается плодотворной. В прикладных областях, как правило, имеют дело с уравнениями конкретного вида, допускающими нетривиальную группу. Таковы, например, уравнения гидродинамики, теории упругости и пластичности, магнитной гидродинамики и другие уравнения математической физики. Трудность исследования задач для таких уравнений состоит в их нелинейности и большом количестве переменных. Поэтому изучение основ теории групповых свойств для исследования конкретных систем дифференциальных уравнений представляется важным фактором в подготовке математиков.

В связи с этим, основной целью освоения дисциплины является приобретение знаний и умений по исследованию групповых свойств дифференциальных уравнений; развитию способностей к самостоятельному использованию приобретенных знаний в своей профессиональной деятельности и формированию соответствующих компетенций.

Задачи дисциплины:

- усвоение студентами основного теоретического материала курса;
- выработка прочного навыка по решению соответствующих уравнений;
- приобретение студентами знаний, позволяющих применять их в различных научных отраслях.

## **2. Место дисциплины в структуре ОПОП ВО**

Дисциплина «Групповые свойства дифференциальных уравнений» входит в вариативную часть Блока 1 «Дисциплины (модули)» и относится к дисциплинам по выбору основной образовательной программы по направлению подготовки 01.03.01 Математика профиля «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление».

Приступая к изучению данной дисциплины обучающийся должен освоить следующие дисциплины:

- Математический анализ
- Дифференциальные уравнения
- Функциональный анализ
- Уравнения с частными производными

В результате освоения данной дисциплины, полученные знания будут необходимы как предшествующие при изучении дисциплин магистерской программы «Уравнения в частных производных».

## **3. Требования к результатам освоения дисциплины (модуля)**

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование элементов следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО 3++ и ОПОП ВО по данному направлению подготовки:

профессиональные компетенции по стандарту (ПКС):

**ПКС-1** - Способен уметь ясно и понятно представлять математические знания с учетом уровня аудитории.

*Индикаторы компетенции:*

**ПКС-1.1** Способен обрабатывать, анализировать и осуществлять сбор информации по заданной тематике.

**ПКС-1.2** Способен формулировать математические знания с учетом уровня слушателей.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

**Знать** основной теоретический материал курса, позволяющий исследовать нелинейные уравнения в частных производных.

**Уметь** применять полученные теоретические знания на практике.

**Владеть** специальными методами исследования, основанными на групповых свойствах дифференциальных уравнений.

**Развить** способности к научно-исследовательской деятельности.

#### 4. Содержание и структура дисциплины (модуля)

##### 4.1. Содержание дисциплины (модуля)

№ п/п	Наименование раздела/темы	Содержание раздела	Код контролируемой компетенции (или ее части)	Наименование оценочного средства
1	2	3	4	5
1	<i>Группы, допускаемые дифференциальными уравнениями</i>	Локальная группа Ли. Три основные теоремы Ли. Инварианты и инвариантные многообразия. Определяющие уравнения. Задача групповой классификации. Алгебры Ли операторов.	ПКС-1	ДЗ, КР, К, Т
2	<i>Основные группы систем уравнений</i>	Системы уравнений первого порядка. Уравнения второго и высших порядков. Полные системы. Линейное уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными.	ПКС-1	ДЗ, КР, К, Т
3	<i>Инвариантные решения</i>	Инварианты группы преобразований. Инвариантные решения уравнений. Классификация инвариантных решений.	ПКС-1	ДЗ, КР, К, Т
4	<i>Частичная инвариантность</i>	Ранг и дефект многообразия. Частично инвариантные решения. Кратные волны.	ПКС-1	ДЗ, КР, К, Т
5	<i>Дифференциальные</i>	Автономные системы. Групповое расслоение.	ПКС-1	ДЗ, КР, К, Т

	<i>инварианты</i>	Специальные задачи и приложения.		
--	-------------------	----------------------------------	--	--

В графе 5 приводятся планируемые формы текущего контроля: защита лабораторной работы (ЛР), выполнение курсового проекта (КП), контрольной работы (КР), расчетно-графического задания (РГЗ), домашнего задания (ДЗ) написание реферата (Р), эссе (Э), коллоквиум (К), рубежный контроль (РК), тестирование (Т) и т.д.

#### 4.2. Структура дисциплины (модуля)

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетные единицы (108 часов).

Вид работы	Трудоемкость, часов	
	7 семестр	Всего
<b>Общая трудоемкость (в часах)</b>	<b>108</b>	<b>108</b>
<b>Контактная работа (в часах):</b>	<b>56</b>	<b>56</b>
<i>Лекции (Л)</i>	28	28
<i>Практические занятия (ПЗ)</i>	28	28
<b>Самостоятельная работа (в часах), в том числе контактная работа:</b>	<b>52</b>	<b>52</b>
<i>Самостоятельное изучение разделов</i>	5	5
<i>Курсовой проект (КП), курсовая работа (КР)</i>	20	20
Подготовка и прохождение промежуточной аттестации	27	27
<b>Вид промежуточной аттестации</b>	<b>Экзамен, курсовая работа</b>	<b>Экзамен, курсовая работа</b>

#### 4.3. Лекционные занятия

№ п/п	Тема
1	<i>Группы, допускаемые дифференциальными уравнениями. Цель и задачи изучения темы - ознакомить с локальной группой Ли, задачей групповой классификации.</i>
2	<i>Основные группы систем уравнений. Цель и задачи изучения темы - изучить системы уравнений первого порядка, уравнения второго и высших порядков, полные системы, линейное уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными.</i>
3	<i>Инвариантные решения. Цель и задачи изучения темы – изучить инварианты группы преобразований, инвариантные решения уравнений, классификация инвариантных решений.</i>
4	<i>Частичная инвариантность. Цель и задачи изучения темы – ознакомить с рангом и дефектом многообразия. Изучить частично инвариантные решения, кратные волны.</i>
5	<i>Дифференциальные инварианты. Цель и задачи изучения темы – ознакомить с автономными системами. Исследовать групповое расслоение, специальные задачи и приложения.</i>

#### 4.4. Практические занятия

№ п/п	Тема
1	Локальная группа Ли. Три основные теоремы Ли. Инварианты и инвариантные многообразия.
2	Определяющие уравнения. Задача групповой классификации. Алгебры Ли операторов
3	Системы уравнений первого порядка
4	Уравнения второго и высших порядков. Полные системы
5	Линейное уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными
6	Инварианты группы преобразований
7	Инвариантные решения уравнений
8	Классификация инвариантных решений
9	Ранг и дефект многообразия
10	Частично инвариантные решения
11	Кратные волны
12	Автономные системы
13	Групповое расслоение
14	Специальные задачи и приложения.

#### 4.5. Самостоятельное изучение разделов дисциплины

№ п/п	Вопросы, выносимые на самостоятельное изучение
1	Действие и представление группы
2	Условие инвариантности
3	Структура основной алгебры Ли
4	Понижение размерности уравнения
5	Универсальный инвариант группы
6	Индукцированная алгебра Ли
7	Волновые уравнения
8	Решение типа бегущей волны
9	Бесконечные группы Ли
10	Инвариантные решения задачи Коши

## **5. Оценочные материалы для текущего и рубежного контроля успеваемости и промежуточной аттестации**

Конечными результатами освоения программы дисциплины являются сформированные когнитивные дескрипторы «знать», «уметь», «владеть», расписанные по отдельным компетенциям. Формирование этих дескрипторов происходит в течение всего семестра по этапам в рамках различного вида занятий и самостоятельной работы.

В ходе изучения дисциплины предусматриваются текущий, рубежный контроль и промежуточная аттестация.

**5.1. Оценочные материалы для текущего контроля.** Цель текущего контроля – оценка результатов работы в семестре и обеспечение своевременной обратной связи, для коррекции обучения, активизации самостоятельной работы обучающегося. Объектом текущего контроля являются конкретизированные результаты обучения (учебные достижения) по дисциплине.

*Текущий контроль* успеваемости обеспечивает оценивание хода освоения дисциплины «Групповые свойства дифференциальных уравнений» и включает: ответы на теоретические вопросы на практическом занятии, решение практических задач и выполнение заданий на практическом занятии. Оценка качества подготовки на основании выполненных заданий ведется преподавателем (с обсуждением результатов), баллы начисляются в зависимости от сложности задания.

### **5.1.1. Вопросы по темам дисциплины «Групповые свойства дифференциальных уравнений» (контролируемые компетенции ПКС-1)**

Устный опрос является одним из основных способов учёта знаний обучающегося по дисциплине «Групповые свойства дифференциальных уравнений». Развёрнутый ответ студента должен представлять собой связное, логически последовательное сообщение на заданную тему, показывать его умение применять определения.

Устные опросы проводятся во время практических занятий, а также в качестве дополнительного испытания при недостаточности результатов тестирования и решения задач. Вопросы опроса не должны выходить за рамки, объявленной для данного занятия темы. Устные опросы необходимо строить так, чтобы вовлечь в тему обсуждения максимальное количество обучающихся в группе, проводить параллели с уже пройденным учебным материалом данной дисциплины, находить удачные примеры из современной действительности, что увеличивает эффективность усвоения материала.

Основные вопросы для устного опроса доводятся до сведения студентов на предыдущем практическом занятии. При оценке опросов анализу подлежит точность формулировок, связность изложения материала, обоснованность суждений.

#### **Вопросы по темам дисциплины «Групповые свойства дифференциальных уравнений» (контролируемые компетенции ПКС-1):**

*Тема 1. Группы, допускаемые дифференциальными уравнениями.*

1. Локальная группа Ли. Три основные теоремы Ли.
2. Инварианты и инвариантные многообразия.
3. Определяющие уравнения. Задача групповой классификации.
4. Алгебры Ли операторов.

*Тема 2. Основные группы систем уравнений.*

1. Системы уравнений первого порядка.
2. Уравнения второго и высших порядков.
3. Полные системы.



4. Линейное уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными.

*Тема 3. Инвариантные решения.*

1. Инварианты группы преобразований.
2. Инвариантные решения уравнений.
3. Классификация инвариантных решений.

*Тема 4. Частичная инвариантность.*

1. Ранг и дефект многообразия.
2. Частично инвариантные решения.
3. Кратные волны.

*Тема 5. Дифференциальные инварианты.*

1. Автономные системы.
2. Групповое расслоение.
3. Специальные задачи и приложения.

***Критерии формирования оценок (оценивания) устного опроса.***

В результате устного опроса знания, обучающегося оцениваются по следующей шкале:

***4 балла***, ставится, если обучающийся:

- 1) полно излагает изученный материал, даёт правильное определенное экономических понятий;
- 2) обнаруживает понимание материала, может обосновать свои суждения, применить знания на практике, привести необходимые примеры не только по учебнику, но и самостоятельно составленные;
- 3) излагает материал последовательно и правильно с точки зрения норм литературного языка.

***3 балла***, ставится, если обучающийся даёт ответ, удовлетворяющий тем же требованиям, что и для балла «1», но допускает 1-2 ошибки, которые сам же исправляет, и 1-2 недочёта в последовательности и языковом оформлении излагаемого.

***2-1 балл***, ставится, если обучающийся обнаруживает знание и понимание основных положений данной темы, но:

- 1) излагает материал неполно и допускает неточности в определении понятий;
- 2) не умеет достаточно глубоко и доказательно обосновать свои суждения и привести свои примеры;
- 3) излагает материал непоследовательно и допускает ошибки в языковом оформлении излагаемого.

***0 баллов***, ставится, если обучающийся обнаруживает незнание большей части соответствующего раздела изучаемого материала, допускает ошибки в формулировке.

Баллы могут ставиться не только за единовременный ответ, но и за рассредоточенный во времени, т.е. за сумму ответов, данных студентом на протяжении занятия.

***5.1.2. Оценочные материалы для самостоятельной работы обучающегося (типовые задачи)***

### (контролируемые компетенции ПКС-1)

Перечень типовых задач для самостоятельной работы сформирован в соответствии с тематикой практических занятий по дисциплине «Групповые свойства дифференциальных уравнений».

*Тема 1. Группы, допускаемые дифференциальными уравнениями.*

1. Проверить, образуют ли указанные семейства преобразований локальную однопараметрическую группу Ли  $G_1$ . Найти закон умножения и ввести канонический параметр (если закон умножения не канонический):

а) Перенос:  $\bar{x} = x + a\lambda$ ;  $x, \bar{x}, \lambda \in R^n$ ,  $\lambda$  - заданный вектор,  $a \in R$ .

б) Растяжение:  $\bar{x} = ax$  (однородное);  $\bar{x}^i = a^{\mu_i} x^i$ ,  $i = 1, \dots, n$  (неоднородное). Здесь  $x, \bar{x}, \mu \in R^n$ ,  $\mu$  - заданный вектор,  $a > 0$ .

2. Найти преобразования группы  $G_1$  заданной оператором:

а)  $(x + y)\partial_x + (y - x)\partial_y$ ;

б)  $x^2\partial_x + xy\partial_y$ ;

в)  $(1 + x^2)\partial_x + xy\partial_y$ ;

г)  $x^2\partial_x + y^2\partial_y$ .

3. Выполнить замену переменных

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad u = U \cos \theta - V \sin \theta, \quad v = U \sin \theta + V \cos \theta$$

в дифференциальных операторах:

а)  $x\partial_x + y\partial_y + u\partial_u + v\partial_v$ ;

б)  $y\partial_x - x\partial_y + v\partial_u - u\partial_v$ .

4. Найти инварианты однопараметрической группы Ли заданной оператором

а)  $y\partial_x + x\partial_y$ ;

б)  $(1 + x^2)\partial_x + xy\partial_y + z\partial_z$ ;

5. Проверить инвариантность многообразия  $M$  относительно преобразования  $G_1$  заданной оператором  $X$  и записать многообразие  $M$  в инвариантах допускаемого оператора:

а)  $\tilde{O} = (y + xz)\partial_x + (yz - x)\partial_y + (1 + z^2)\partial_z$ ,  $M$  - однополостный гиперболоид  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ ;

б)  $X = y(\partial_x + \partial_y)$ ,  $M$  - прямая  $y = 0$ .

#### *Методические рекомендации по решению задач*

При выполнении заданий необходимо внимательно ознакомиться с контентом по соответствующему вопросу темы «Группы, допускаемые дифференциальными уравнениями». Основная цель выработать навыки исследования групп, допускаемых дифференциальными уравнениями.

*Тема 2. Основные группы систем уравнений.*

1. Вычислить первое и второе продолжение операторов:

а)  $X = x^2\partial_x + xi\partial_u$ ,  $Z = R^2(t, x) \times R(u)$ ; б)

$$X = 4t\partial_t - u\partial_u, \quad Z = R^2(t, x) \times R(u).$$

2. Показать, что уравнение нелинейной теплопроводности  $u_t - u^4 u_{xx} = 0$  допускает алгебру

Ли  $L_5$  операторов  $X_1 = \partial_t$ ,  $X_2 = \partial_x$ ,  $X_3 = 2t\partial_t + x\partial_x$ ,  $X_4 = 4t\partial_t - u\partial_u$ ,  $X_5 = x^2\partial_x + xi\partial_u$ .

3. Показать, что уравнения одномерной газовой динамики для политропного газа

$$u_t + uu_x + \rho^{-1} p_x = 0,$$

$$\rho_t + \rho u_x + u \rho_x = 0,$$

$$p_t + \rho u_x + u p_x = 0$$

допускают алгебру Ли  $L_6$  операторов  $X_1 = \partial_t$ ,  $X_2 = \partial_x$ ,  $X_3 = t\partial_t + x\partial_x$ ,  $X_4 = t\partial_t + u\partial_u$ .

В случае  $\gamma = 3$  алгебра Ли расширяется  $X_5 = t^2\partial_t + tx\partial_x + (x - tu)\partial_u - t\rho\partial_\rho - 3tp\partial_p$ .

4. Вычислить группы преобразований, допускаемых ОДУ второго порядка:

а)  $y'' = y^{-2}y' - (xy)^{-1}$ ;

б)  $y'' = \exp(-y')$ .

5. Найти группу преобразований, допускаемых одномерными уравнениями мелкой воды ( $g = \text{const}$ )

$$u_t + uu_x + gh_x = 0, \quad h_t + hu_x + uh_x = 0.$$

6. Найти преобразования растяжения, допускаемые уравнением пограничного слоя на полубесконечной пластине (задача Блазиуса)

$$\psi_y \psi_{xy} - \psi_x \psi_{yy} = \nu \psi_{yyy},$$

$$\psi(x, 0) = \psi_y(x, 0) = 0, \quad \psi_y \rightarrow U \quad (y \rightarrow \infty).$$

Здесь  $\nu$  и  $U$  - постоянные.

7. Доказать, что модель двумерных изоэнтропических движений политропного газа с показателем адиабаты  $\gamma = 2$ , описываемая системой дифференциальных уравнений

$$u_t + uu_x + \nu u_y + 2cc_x = 0,$$

$$v_t + uv_x + \nu v_y + 2cc_y = 0,$$

$$c_t + uc_x + vc_y + 2^{-1}c(u_x + v_y) = 0$$

допускает проектный оператор

$$\tilde{O} = t^2\partial_t + tx\partial_x + ty\partial_y - tc\partial_c + (x - tu)\partial_u + (y - tv)\partial_v.$$

8. Показать, что уравнения вращающейся мелкой воды ( $g, f = \text{const}$ )

$$u_t + uu_x + \nu u_y - fv + gh_x = 0,$$

$$v_t + uv_x + \nu v_y + fu + gh_y = 0,$$

$$h_t + (uh)_x + (vh)_y = 0$$

допускают операторы  $X_1 = \partial_t$ ,  $X_2 = \partial_x$ ,  $X_3 = \partial_y$ ,  $X_4 = -y\partial_x + x\partial_y - v\partial_u + u\partial_v$ .

#### Методические рекомендации по решению задач

При выполнении заданий необходимо внимательно ознакомиться с контентом по соответствующему вопросу темы «Основные группы систем уравнений». Основная цель исследования основных групп систем уравнений.

#### Тема 3. Инвариантные решения.

1. Выяснить, образуют ли операторы  $X_1, \dots, X_r$  алгебру Ли  $L_r$ . Если образуют, найти преобразования, которыми порождается соответствующая группа  $G_r$ :

а)  $X_1 = \partial_t$ ,  $X_2 = \partial_x$ ,  $X_3 = t\partial_x + \partial_u$ ,  $X_4 = t\partial_t + x\partial_x$ ,  $X_5 = x\partial_x + u\partial_u + 2h\partial_h$ ;

б)  $X_1 = \partial_t$ ,  $X_2 = \partial_x$ ,  $X_3 = 2t\partial_t + x\partial_x$ ,  $X_4 = 4t\partial_t - u\partial_u$ ,  $X_5 = x^2\partial_x + xu\partial_u$ .

2. Найти инварианты многопараметрических групп Ли  $L_r$  операторов  $X_1, \dots, X_r$ :

а)  $X_1 = 2t\partial_t + x\partial_x$ ,  $X_2 = 2x\partial_x + u\partial_u$ ;

б)  $X_1 = x\partial_x + y\partial_y + p\partial_p + q\partial_q$ ,  $X_2 = y\partial_x - x\partial_y + q\partial_p - p\partial_q$ .

3. Построить пример полной системы операторов  $R^2$ , не порождающих алгебру Ли.

4. Вычислить ранг и дефект многообразия  $M$  относительно группы  $G$ , порождаемой операторами  $X_\alpha$ . Проверить, имеет ли место редукция многообразия  $M$ . Охарактеризовать орбиту многообразия  $M$ :

а)  $M : \psi^1 = \frac{u+v}{x} = 0, \psi^2 = \frac{y^2 + uv}{x^2} = 0,$

б)  $M : \psi^1 = \frac{y}{x} + 1 = 0, \psi^2 = u^2 + v - \frac{x}{y} = 0,$

$G : X_1 = x\partial_x + y\partial_y, X_2 = u\partial_u + v\partial_v;$

$G : X_1 = x\partial_x + y\partial_y, X_2 = \partial_v.$

5. Проверить, что множество верхнетреугольных матриц размерности  $n \times n$  образует алгебру Ли с коммутатором  $[A, B] = AB - BA$ .

6. Проверить, что множество векторов  $\mathbf{a} \in R^3$  образует алгебру Ли относительно коммутатора  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ . Построить таблицу коммутаторов этой алгебры Ли. Является ли она простой, разрешимой?

7. Показать, что линейной заменой базиса каждая двумерная алгебра Ли приводится к алгебре Ли со следующими коммутационными соотношениями между базисными элементами  $X_1$  и  $X_2$ :

а)  $[X_1, X_2] = 0$  - абелева; б)  $[X_1, X_2] = X_1$  - не абелева.

8. Пусть  $M, N$  - идеалы в  $L$ . Показать, что  $M \cap N$  - идеал в  $L$ .

9. Пусть  $M, N$  - идеалы в  $L$ . Показать, что  $M + N = \{X + Y | X \in M, Y \in N\}$  - также идеал в  $L$ .

10. Может ли алгебра Ли одновременно быть простой и разрешимой?

*Методические рекомендации по решению задач*

При выполнении заданий необходимо внимательно ознакомиться с контентом по соответствующему вопросу темы «Инвариантные решения». Основная цель исследования инвариантных решений.

#### Тема 4. Частичная инвариантность.

1. Доказать, что любая подалгебра разрешимой алгебры Ли также разрешима.

2. Доказать, что любая разрешимая алгебра содержит нетривиальный абелев идеал.

3. Являются ли следующие алгебры Ли разрешимыми?

а)  $X_1 = \partial_t, X_2 = \partial_x, X_3 = t\partial_x + \partial_u, X_4 = t\partial_t + x\partial_x, X_5 = x\partial_x + u\partial_u + 2h\partial_h;$

б)  $X_1 = \partial_t, X_2 = \partial_x, X_3 = 2t\partial_t + x\partial_x, X_4 = 4t\partial_t - u\partial_u, X_5 = x^2\partial_x + xu\partial_u.$

4. Являются ли алгебры Ли  $L(X_1, X_2, X_3)$  и  $L'(Y_1, Y_2, Y_3)$  изоморфными?

$X_1 = \partial_t, X_2 = 2t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y - u\partial_u - v\partial_v, X_3 = t^2\partial_t + tx\partial_x + ty\partial_y + (x - tu)\partial_u + (y - tv)\partial_v,$

$Y_1 = \partial_t - \frac{f}{2}\partial_\theta,$

$Y_2 = \cos(ft)\partial_t - \frac{f}{2}r\sin(ft)\partial_r - \frac{f}{2}\cos(ft)\partial_\theta + \frac{f}{2}(U\sin(ft) - fr\cos(ft))\partial_U + \frac{f}{2}(V + fr)\sin(ft)\partial_V,$

$Y_3 = \sin(ft)\partial_t + \frac{f}{2}r\cos(ft)\partial_r - \frac{f}{2}\sin(ft)\partial_\theta - \frac{f}{2}(U\cos(ft) + fr\sin(ft))\partial_U - \frac{f}{2}(V + fr)\cos(ft)\partial_V.$

5. Построить и по возможности проинтегрировать инвариантную подмодель системы

уравнений E по допускаемой подалгебре H:

$$\begin{aligned} \text{а) } E : u_t + uu_x + vu_y = 0, \quad v_t + uv_x + vv_y = 0; \\ H = \{t\partial_x + \partial_u, t\partial_y + \partial_v\}. \end{aligned} \quad \text{б)}$$

$$E : u_t - u^4 u_{xx} = 0; \quad H = \{2t\partial_t + x\partial_x, 2x\partial_x + u\partial_u\}.$$

6. Показать, что уравнения двумерного движения политронного газа с показателем адиабата  $\gamma = 2$

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + vu_y + 2cc_x &= 0, \\ v_t + uv_x + vv_y + 2cc_y &= 0, \\ c_t + uc_x + vc_y + 2^{-1}c(u_x + v_y) &= 0 \end{aligned}$$

имеет инвариантное относительно подалгебры  $\{X, Y, Z\}$

$$\begin{aligned} X &= \partial_x + t\partial_y + \partial_v, \quad Y = \partial_y - t\partial_x - \partial_u, \\ Z &= (t^2 + 1)\partial_t + (tx + y)\partial_x + (ty - x)\partial_y - tc\partial_c + (x - tu + v)\partial_u + (y - tv - u)\partial_v \end{aligned}$$

решение нулевого ранга

$$u = \frac{tx - ay}{t^2 + 1}, \quad v = \frac{x + aty}{a(t^2 + 1)}, \quad c = \frac{c_0}{\sqrt{t^2 + 1}} \quad (a, c_0 = \text{const}).$$

*Методические рекомендации по решению задач*

При выполнении заданий необходимо внимательно ознакомиться с контентом по соответствующему вопросу темы «Частичная инвариантность». Основная цель выработать навыки исследования частичной инвариантности.

*Тема 5. Дифференциальные инварианты.*

1. Показать, что уравнения подмодели, определяющей частично инвариантное решение системы

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + vu_y + 2cc_x &= 0, \\ v_t + uv_x + vv_y + 2cc_y &= 0, \\ c_t + uc_x + vc_y + 2^{-1}c(u_x + v_y) &= 0 \end{aligned}$$

по подалгебре  $H = \{\partial_y, t\partial_y + \partial_v\}$ , имеют вид

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + 2cc_x &= 0, \quad c_t + uc_x + 2^{-1}c(u_x + v_1) = 0, \\ v_{1t} + uv_{1x} + v_1^2 &= 0, \quad v_{0t} + uv_{0x} + v_0v_1 = 0, \end{aligned}$$

где  $u = u(t, x)$ ,  $c = c(t, x)$ ,  $v = v_1(t, x)y + v_0(t, x)$ . Указать ранг и дефект этого решения.

2. Выяснить, возможно ли построение частично инвариантных решений уравнений

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + vu_y + 2cc_x &= 0, \\ v_t + uv_x + vv_y + 2cc_y &= 0, \\ c_t + uc_x + vc_y + 2^{-1}c(u_x + v_y) &= 0 \end{aligned}$$

по подалгебрам:

$$\text{а) } H = \{\partial_t, -t\partial_t + u\partial_u + v\partial_v + c\partial_c\};$$

$$\text{б) } H = \{\partial_t, t^2\partial_t + tx\partial_x + ty\partial_y - tc\partial_c + (x - tu)\partial_u + (y - tv)\partial_v, 2t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y - c\partial_c - u\partial_u - v\partial_v\}.$$

3. Построить оптимальные системы подалгебр для алгебр Ли  $L$ :

$$\text{а) } L_3 : X_1 = \partial_x, X_2 = \partial_y, X_3 = x\partial_x + (x + y)\partial_y;$$

б)  $L_3 : X_1 = \partial_x + \partial_p, X_2 = \partial_y + \partial_q, X_3 = y\partial_x - x\partial_y + q\partial_p - p\partial_q$ .

4. Построить оптимальные системы подалгебр для алгебр Ли  $L$  используя двухэтапный алгоритм:

а)  $L_5 : X_1 = \partial_t, X_2 = \partial_x, X_3 = 2t\partial_t + x\partial_x, X_4 = 4t\partial_t - u\partial_u, X_5 = x^2\partial_x + xu\partial_u$ ;

б)  $L_6 : X_1 = \partial_x, X_2 = \partial_y, X_3 = t\partial_x + \partial_u, X_4 = t\partial_y + \partial_v, X_5 = y\partial_x - x\partial_y + v\partial_u - u\partial_v,$   
 $X_6 = x\partial_x + y\partial_y + u\partial_u + v\partial_v$ .

5. Проинтегрировать ОДУ методом интегрирующего множителя:

а)  $y' + y^2 - 2x^{-2} = 0 \quad (X = x\partial_x - y\partial_y)$ ;

б)  $y' - \sin(x^{-1}y) = 0 \quad (X = x\partial_x + y\partial_y)$ .

6. Применить метод «выпрямления» допускаемого оператора для интегрирования ОДУ:

а)  $(y')^2 - y - x^2 = 0 \quad (X = x\partial_x + 2y\partial_y)$ ;

б)  $xy' - y + \exp(y/x) = 0 \quad (X = x^2\partial_x + xy\partial_y)$ .

7. Показать, что ОДУ второго порядка допускает оператор  $X$  и с его помощью понизить порядок уравнения ( $F$  – произвольная гладкая функция):

а)  $xy'' = F(x^{-1}y, y') \quad (X = x\partial_x + y\partial_y)$ ;

б)  $y'' = \left(1 + (y')^2\right)^{3/2} F\left(\sqrt{x^2 + y^2}, \frac{y - xy'}{x + yy'}\right) \quad (X = y\partial_x - x\partial_y)$ .

*Методические рекомендации по решению задач*

При выполнении заданий необходимо внимательно ознакомиться с контентом по соответствующему вопросу темы «Дифференциальные инварианты». Основная цель исследования дифференциальных инвариантов.

**Критерии формирования оценок по заданиям для самостоятельной работы студента (типовые задачи):**

«отлично» (4 балла) - обучающийся показал глубокие знания материала по поставленным вопросам, грамотно, логично его излагает, структурировал и детализировал информацию, избегая простого повторения информации из текста, информация представлена в переработанном виде. Свободно использует необходимые формулы при решении задач;

«хорошо» (3 балла) - обучающийся твердо знает материал, грамотно его излагает, не допускает существенных неточностей в процессе решения задач;

«удовлетворительно» (2 балла) - обучающийся имеет знания основного материала по поставленным вопросам, но не усвоил его деталей, допускает отдельные неточности при решении задач;

«неудовлетворительно» (менее 1 балла) – обучающийся допускает грубые ошибки в ответе на поставленные вопросы и при решении задач.

## 5.2. Оценочные материалы для рубежного контроля

Рубежный контроль осуществляется по более или менее самостоятельным разделам – учебным модулям курса и проводится по окончании изучения материала модуля в заранее установленное время. Рубежный контроль проводится с целью определения качества усвоения материала учебного модуля в целом. В течение семестра проводится

**три таких контрольных мероприятия по графику.**

В качестве форм рубежного контроля можно использовать тестирование (письменное или компьютерное), проведение коллоквиума или контрольных работ. Выполняемые работы должны храниться на кафедре в течение учебного года и по требованию предоставляться в Управление контроля качества. На рубежные контрольные мероприятия рекомендуется выносить весь программный материал (все разделы) по дисциплине.

**5.2.1. Оценочные материалы для контрольной работы (контролируемые компетенции ПКС-1).** Контрольная работа – письменная работа небольшого объема, предполагающая проверку знаний заданного к изучению материала и навыков его практического применения. Проводится три раза в течение изучения дисциплины (семестр) в часы аудиторной работы. Не менее чем за 1 неделю до контрольной работы, преподаватель должен определить студентам исходные данные для подготовки: назвать разделы (темы, вопросы), по которым будут контрольные задания, теоретические источники (с точным указанием разделов, тем, статей) для подготовки.

Контрольные работы могут состоять из одного или нескольких заданий практического содержания. При выполнении контрольной работы пользоваться конспектами лекций, учебниками, задачками не разрешено. Длительность решения контрольных заданий составляет не более 90 минут.

**Образцы контрольных заданий:**

#### **Рейтинговая контрольная работа №1**

1. Для проективной группы  $x' = \frac{x + a_1}{a_2x + a_3}$  получить три независимых друг от друга инфинитезимальных преобразования и построить общее инфинитезимальное преобразование исходной группы.
2. Для присоединенной двухпараметрической группы  $x' = ax + b$  с двумя независимыми инфинитезимальными преобразованиями  $\frac{df}{dx}, x \frac{df}{dx}$  получить линейную однородную группу.

#### **Рейтинговая контрольная работа №2**

1. Построить и по возможности проинтегрировать инвариантную подмодель системы уравнений  $E$  по допускаемой подалгебре  $H$ :

$$E: u_t = u_{zz} - p_x, \quad T_t = T_{zz} - uT_x, \quad p_z = T;$$

$$i. H = \partial_x + \beta \partial_z;$$

$$ii. H = \{\partial_t + x\partial_x + u\partial_u + 2p\partial_p + 2T\partial_T\}.$$

2. Являются ли следующие алгебры Ли разрешимыми?

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = y\partial_x - x\partial_y + v\partial_u - u\partial_v, \quad X_4 = x\partial_x + y\partial_y + u\partial_u + v\partial_v.$$

3. Вычислить ранг и дефект многообразия  $M$  относительно группы  $G$ , порождаемой операторами  $X_\alpha$ . Проверить, имеет ли место редукция многообразия  $M$ . Охарактеризовать орбиту многообразия  $M$ :

$$M : \psi^1 = \arctg(y/x) - t = 0, \psi^2 = \frac{(x-y)u + (x+y)v}{x^2 + y^2} = 0,$$

$$G : X_1 = -y\partial_x + x\partial_y - v\partial_u + u\partial_v, X_2 = \partial_t, X_3 = x\partial_x + y\partial_y + u\partial_u + v\partial_v.$$

### Рейтинговая контрольная работа №3

1. Построить оптимальные системы подалгебр для алгебр Ли  $L$  :

$$L_3 : X_1 = \partial_t, X_2 = t^2\partial_t + tx\partial_x + ty\partial_y, X_3 = 2t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y.$$

2. Построить оптимальные системы подалгебр для алгебр Ли  $L$  используя двухэтапный алгоритм:

$$L_6 : X_1 = y\partial_z - z\partial_y + v\partial_\omega - \omega\partial_v, X_2 = z\partial_x - x\partial_z + \omega\partial_u - u\partial_\omega, X_3 = x\partial_y - y\partial_x + u\partial_v - v\partial_u, X_4 = \partial_y, X_5 = t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z, X_6 = t\partial_t - u\partial_u - v\partial_v - \omega\partial_\omega.$$

3. Проинтегрировать ОДУ методом интегрирующего множителя:

$$y' - (x+y)^2 = 0 \quad (X = \partial_x - \partial_y).$$

4. Применить метод «выпрямления» допускаемого оператора для интегрирования ОДУ:

$$y' - x^{-1}y + x \exp(x^{-1}y) = 0 \quad (X = \partial_x + x^{-1}y\partial_y).$$

5. Показать, что ОДУ второго порядка допускает оператор  $X$  и с его помощью понизить порядок уравнения ( $F$  – произвольная гладкая функция):

$$x^2 y'' = F(y, y') \quad (X = x\partial_x).$$

#### **Критерии формирования оценок по контрольным работам:**

**7 баллов** - ставится за работу, выполненную полностью без ошибок и недочетов; обучающийся демонстрирует знание теоретического и практического материала по теме практической работы, решено 100% задач;

**6 баллов** – ставится за работу, выполненную полностью, но при наличии в ней не более одной негрубой ошибки и одного недочета, не более трех недочетов. Обучающийся демонстрирует знание теоретического и практического материала по теме практической работы, допуская незначительные неточности при решении задач, решено 70% задач;

**5 баллов** – ставится за работу, если бакалавр правильно выполнил не менее 2/3 всей работы или допустил не более одной грубой ошибки и двух недочетов, не более одной грубой и одной негрубой ошибки, не более трех негрубых ошибок, одной негрубой. Обучающийся затрудняется с правильной оценкой предложенной задачи, дает неполный ответ, решено 55% задач

**менее 4 баллов** – ставится за работу, если число ошибок и недочетов превысило норму для оценки 3 или правильно выполнено менее 2/3 всей работы. Обучающийся дает неверную оценку ситуации, решено менее 50 % задач.

**5.2.2. Оценочные материалы: типовые тестовые задания по дисциплине (контролируемые компетенции ПКС-1).** Тест – система стандартизированных заданий, позволяющая автоматизировать процедуру измерения уровня знаний и умений студента. Решение заданий в тестовой форме проводится три раза в течение семестра на платформе <http://open.kbsu.ru/moodle/>. Не менее чем за 1 неделю до тестирования, преподаватель должен определить студентам исходные данные для подготовки к тестированию: назвать разделы (темы, вопросы), по которым будут задания в тестовой форме, теоретические



источники (с точным указанием разделов, тем, статей) для подготовки.

Оценка результатов тестирования производится компьютерной программой, результат выдается немедленно по окончании теста. Максимальный балл за решение заданий в тестовой форме – 5 баллов. До окончания теста студент может еще раз просмотреть все свои ответы на задания и при необходимости внести коррективы.

Полный перечень тестовых заданий представлен в ЭОИС – <https://open.kbsu.ru:8033/moodle/question/category.php?courseid=2637>

#### **Образцы тестовых заданий:**

- 1) Подмножество  $G_r$  называется
  - +: локальной группой Ли
  - : нелокальной группой Ли
  - : дополнением группы Ли
  - : центром группы Ли
- 2) Кривая  $g(t)$  называется однопараметрической подгруппой, если для любых двух ее точек выполнено условие
  - +:  $g(s)g(t) = g(s+t)$
  - :  $g(s)g(t) = sg(t)$
  - :  $g(s)g(t) = g(st)$
  - :  $g(s)g(t) = tg(s)$
- 3) Условие  $X_\alpha I(x) = 0$ ,  $(\alpha = \overline{1, r})$  обеспечивающее, что  $I(x)$  будет инвариантом  $G_r^n$ , является ...
  - +: необходимым и достаточным
  - : необходимым
  - : достаточным
  - : недостаточным

### **5.3. Оценочные материалы для промежуточной аттестации**

Целью промежуточных аттестаций по дисциплине является оценка качества освоения дисциплины обучающимися.

Промежуточная аттестация предназначена для объективного подтверждения и оценивания достигнутых результатов обучения после завершения изучения дисциплины. Осуществляется в конце семестра и представляет собой итоговую оценку знаний по дисциплине «Структурные свойства решений дифференциальных уравнений в частных производных» в виде проведения экзамена. На промежуточную аттестацию отводится до 30 баллов.

#### **Полный перечень вопросов, выносимых на экзамен (контролируемые компетенции ПКС-1):**

1. Понятие группы. Группа Ли.
2. Инварианты группы и инвариантные многообразия.
3. Дефект инвариантности многообразия относительно группы.
4. Задача групповой классификации. Алгебры Ли операторов.

5. Обыкновенные дифференциальные уравнения, обладающие фундаментальной системой решений.
6. Интегрирующий множитель и замена переменных в обыкновенных дифференциальных уравнениях первого порядка.
7. Интегрирующий множитель и замена переменных в дифференциальных уравнениях первого порядка.
8. Системы уравнений первого порядка.
9. Уравнения второго и высших порядков.
10. Полные системы.
11. Линейные уравнения в частных производных второго порядка, допускающие группу максимального порядка.
12. Исследование линейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка, допускающего тривиальную конформную группу.
13. Группы, допускаемые обыкновенными дифференциальными уравнениями второго порядка.
14. Нелинейные уравнения в частных производных второго порядка (случай группы максимального порядка).
15. Определяющие уравнения для дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка.
16. Инвариантные решения уравнений.
17. Классификация инвариантных решений.
18. Частично инвариантные решения.
19. Кратные волны.
20. Групповое расслоение.

**Критерии формирования оценок по промежуточной аттестации.** Уровень знаний определяется оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

1. Оценка «отлично» (91-100 баллов) - студент показывает полные и глубокие знания программного материала, логично и аргументировано отвечает на поставленный вопрос, а также дополнительные вопросы, показывает высокий уровень теоретических знаний.

2. Оценка «хорошо» (81-90 баллов) - студент показывает глубокие знания программного материала, грамотно его излагает, достаточно полно отвечает на поставленный вопрос и дополнительные вопросы, умело формулирует выводы. В тоже время при ответе допускает несущественные погрешности.

3. Оценка «удовлетворительно» (61-80 баллов) - студент показывает достаточные, но не глубокие знания программного материала; при ответе не допускает грубых ошибок или противоречий, однако в формулировании ответа отсутствует должная связь между анализом, аргументацией и выводами. Для получения правильного ответа требуется уточняющие вопросы.

4. Оценки «неудовлетворительно» (36-60 баллов) - студент показывает недостаточные знания программного материала, не способен аргументированно и последовательно его излагать, допускается грубые ошибки в ответах, неправильно отвечает на поставленный вопрос или затрудняется с ответом.

#### **5.4. Оценочные материалы для выполнения курсовой работы по дисциплине**

Смысл написания курсовой работы состоит в приобретении студентом навыков самостоятельного решения практических проблем с научных позиций и письменного изложения полученных результатов по выбранной теме (теоретическая часть, формирование и закрепление системы знаний, умений и навыков по данной теме, самостоятельного проведения различных этапов исследования).

#### **Примерные темы курсовых работ:**

1. Исследование одной краевой задачи для нагруженного уравнения третьего порядка
2. Аналог задачи Трикоми для уравнения смешанного типа
3. Исследование вопроса однозначной разрешимости нелокальной краевой задачи для уравнения смешанного типа третьего порядка
4. Единственность решения одной нелокальной краевой задачи уравнения высокого порядка
5. Краевая задача для смешанно-параболического уравнения
6. Задача Бицадзе-Самарского для уравнения параболического типа третьего порядка
7. Метод наименьших квадратов
8. Существование решения одной нелокальной краевой задачи для уравнения высокого порядка.
9. Смешанная задача для дифференциального уравнения с инволюцией и потенциалом специального вида.
10. Метод функции Грина для обыкновенного дифференциального уравнения

#### **Критерии оценивания курсовой работы:**

**Оценка курсовой работы "отлично".** Курсовая работа будет оценена педагогом на «отлично», если во введении приводится обоснование выбора конкретной темы, полностью раскрыта актуальность её в научной отрасли, чётко определены грамотно поставлены задачи и цель курсовой работы. Основная часть работы демонстрирует большое количество прочитанных автором работ. В ней содержатся основные термины и они адекватно использованы. Критически прочитаны источники: вся необходимая информация проанализирована, вычленена, логически структурирована. Присутствуют выводы и грамотные обобщения. В заключении сделаны логичные выводы, а собственное отношение выражено чётко. Автор курсовой работы грамотно демонстрирует осознание возможности применения исследуемых теорий, методов на практике. Приложение содержит цитаты и таблицы, иллюстрации и диаграммы: все необходимые материалы. Курсовая работа написана в стиле академического письма (использован научный стиль изложения материала). Автор адекватно применял терминологию, правильно оформил ссылки. Оформление работы соответствует требованиям ГОСТ, библиография, приложения оформлены на отличном уровне. Объём работы заключается в пределах от 15 до 30 страниц.

**Оценка курсовой работы "хорошо".** Курсовая работа на «хорошо» во введении содержит некоторую нечёткость формулировок. В основной её части не всегда проводится критический анализ, отсутствует авторское отношение к изученному материалу. В

заключение неадекватно использована терминология, наблюдаются незначительные ошибки в стиле, многие цитаты грамотно оформлены. Допущены незначительные неточности в оформлении библиографии, приложений.

**Оценка курсовой работы «удовлетворительно».** Курсовая работа на «удовлетворительно» во введении содержит лишь попытку обоснования выбора темы и актуальности, отсутствуют чёткие формулировки. Расплывчато определены задачи и цели. Основное содержание - пересказ чужих идей, нарушена логика изложения, автор попытался сформулировать выводы. В заключении автор попытался сделать обобщения, собственного отношения к работе практически не проявил. В приложении допущено несколько грубых ошибок. Не выдержан стиль требуемого академического письма по проекту в целом, часто неверно употребляются научные термины, ссылки оформлены неграмотно, наблюдается плагиат.

**Оценка курсовой работы «неудовлетворительно».** При оценивании такой курсовой работы, ее недостатки видны сразу. Курсовая работа на «неудовлетворительно» во введении не содержит обоснования темы, нет актуализации темы. Не обозначены и цели, задачи проекта. Скупое основное содержание указывает на недостаточное число прочитанной литературы. Внутренняя логика всего изложения проекта слабая. Нет критического осмысления прочитанного, как и собственного мнения. Нет обобщений, выводов. Заключение таковым не является. В нём не приведены грамотные выводы. Приложения либо вовсе нет, либо оно недостаточно. В работе наблюдается отсутствие ссылок, плагиат, не выдержан стиль, неадекватное использование терминологии. По оформлению наблюдается ряд недочётов: не соблюдены основные требования ГОСТ, а библиография с приложениями содержат много ошибок. Менее 10 страниц объём всей работы.

#### **6. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

Максимальная сумма (100 баллов), набираемая студентом по дисциплине включает две составляющие:

– первая составляющая – оценка регулярности, своевременности и качества выполнения студентом учебной работы по изучению дисциплины в течение периода изучения дисциплины (семестра, или нескольких семестров) (сумма – не более 70 баллов). Баллы, характеризующие успеваемость студента по дисциплине, набираются им в течение всего периода обучения за изучение отдельных тем и выполнение отдельных видов работ.

– вторая составляющая – оценка знаний студента по результатам промежуточной аттестации (не более 30 –баллов).

Критерием оценки уровня сформированности компетенций в рамках учебной дисциплины «Групповые свойства дифференциальных уравнений» является экзамен. Общий балл текущего и рубежного контроля складывается из составляющих, приведенных в Приложении 1.

Целью промежуточных аттестаций по дисциплине является оценка качества освоения дисциплины обучающимися. Критерии оценки качества освоения дисциплины прилагается (Приложение 2).

Типовые задания, обеспечивающие формирование компетенций ПКС-1 представлены в таблице 1.

Таблица 1. Результаты освоения учебной дисциплины, подлежащие проверке

Результаты обучения (компетенции)	Основные показатели оценки результатов обучения	Индикаторы достижения компетенции	Вид оценочного материала, обеспечивающие формирование компетенций
<p><b>ПКС-1-</b> Способен уметь ясно и понятно представлять математические знания с учетом уровня аудитории</p>	<p><b>Знать:</b> Перспективные научные направления в профильной предметной области. <b>Уметь:</b> Публично представлять собственные и известные научные результаты в данной предметной области. <b>Владеть:</b> Навыками устного и письменного аргументированного изложения собственных результатов</p>	<p><b>ИД-1_ПКС-1.1</b> Способен обрабатывать, анализировать и осуществлять сбор информации по заданной тематике. <b>ИД-2_ПКС-1.2</b> Способен формулировать математические знания с учетом уровня слушателей.</p>	<p>Типовые оценочные материалы для устного опроса (раздел 5.1.1, №№ 5 и т.д.), типовые контрольные работы (раздел 5.2.1, №№ 1-3 и т.д.), типовые тестовые задания (раздел 5.2.2, №№ 1-5 и т.д.), типовые оценочные материалы к экзамену (раздел 5.3, №№ 1-5 и т.д.), примерные темы курсовых работ (раздел 5.4, №№ 1-5 и т.д.) Типовые оценочные материалы для устного опроса (раздел 5.1.1, №№ 1-6 и т.д.), типовые задания для самостоятельной работы (раздел 5.1.2, №№ 1-3 и т.д.), типовые контрольные работы (раздел 5.2.1), типовые тестовые задания (раздел 5.2.2, №№ 1-6 и т.д.), типовые оценочные материалы к экзамену (раздел 5.3, №№ 1-8 и т.д.), примерные темы курсовых работ (раздел 5.4, №№ 1-5 и т.д.)</p>

Таким образом, выполнение типовых заданий, представленных в разделе 5 «Оценочные материалы для текущего и рубежного контроля успеваемости и промежуточной аттестации» позволит обеспечить:

- способностью уметь ясно и понятно представлять математические знания с учетом уровня аудитории (ПКС-1).

## 7. Учебно-методическое обеспечение дисциплины

### 7.1. Нормативно-законодательные акты

1. Федеральный закон "Об образовании в Российской Федерации" от 29.12.2012 N 273-ФЗ (последняя редакция). - [Электронный ресурс]. – Режим доступа: Консультант Плюс: URL: <http://consultant.ru/>

3. Приказ Минобрнауки России от 10.01.2018 N8 "Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта высшего образования - бакалавриат по направлению подготовки 01.03.01 Математика (Зарегистрировано в Минюсте России 6.02.2018 N49941) – Режим доступа: URL: [https://fgosvo.ru/uploadfiles/FGOS%20VO%203++/Bak/010301\\_B\\_3\\_15062021.pdf](https://fgosvo.ru/uploadfiles/FGOS%20VO%203++/Bak/010301_B_3_15062021.pdf)

## 7.2. Основная литература

1. Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа : научное издание / И. В. Астахова, С. С. Ежак, Е. С. Карулина [и др.] ; под редакцией И. В. Астаховой. — Москва : ЮНИТИ-ДАНА, 2017. — 646 с. — ISBN 978-5-238-02368-7. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/81638.html>
2. Краснова, Д. А. Непрерывные группы уравнений : учеб. пособие / Краснова Д. А. - Красноярск : СФУ, 2017. - 116 с. - ISBN 978-5-7638-3627-1. - Текст : электронный // URL : <http://www.medcollegelibrary.ru/book/ISBN9785763836271.html>
3. Оболенский, А. Ю. Лекции по качественной теории дифференциальных уравнений / А. Ю. Оболенский. — Москва, Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, Институт компьютерных исследований, 2019. — 320 с. — ISBN 978-5-4344-0706-9. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/91945.html>

## 7.3. Дополнительная литература

1. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. [Электронный ресурс] — М.: Наука, 1978. — 339 с. — Режим доступа: [http://www.newlibrary.ru/book/ovsjannikov\\_1\\_v\\_/gruppovoi\\_analiz\\_differencialnyh\\_uravnenii.html#](http://www.newlibrary.ru/book/ovsjannikov_1_v_/gruppovoi_analiz_differencialnyh_uravnenii.html#)
2. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. [Электронный ресурс] — М.: Мир, 1989. — 639 с. — Режим доступа: [http://www.newlibrary.ru/book/olver\\_p\\_/prilozhenija\\_grupp\\_li\\_k\\_differencialnym\\_uravnenijam.html#](http://www.newlibrary.ru/book/olver_p_/prilozhenija_grupp_li_k_differencialnym_uravnenijam.html#)
3. Дородницын, В. А. Групповые свойства разностных уравнений / Дородницын В. А. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2001. - 240 с. - ISBN 5-9221-0171-4. - Текст : электронный // ЭБС "Консультант студента" : [сайт]. - URL : <https://www.studentlibrary.ru/book/ISBN5922101714.html>
4. Чиркунов, Ю. А. Элементы симметричного анализа дифференциальных уравнений механики сплошной среды / Чиркунов Ю. А. - Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2012. - 659 с. (Серия "Монографии НГТУ") - ISBN 978-5-7782-1896-3. - Текст : электронный // ЭБС "Консультант студента" : [сайт]. - URL : <https://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785778218963.html>
5. Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. [Электронный ресурс] — М.: Наука, 1983. — 280 с. — Режим доступа: [http://www.newlibrary.ru/book/ibragimov\\_n\\_h\\_/gruppy\\_preobrazovanii\\_v\\_matematicheskoi\\_fizike.html#](http://www.newlibrary.ru/book/ibragimov_n_h_/gruppy_preobrazovanii_v_matematicheskoi_fizike.html#)

## 7.4. Периодические издания

1. Вестник МГУ Серия 1. Математика. Механика.
2. Дифференциальные уравнения
3. Доклады РАН
4. Журнал вычислительной математики и математической физики
5. Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки
6. Успехи математических наук

### 7.5. Интернет-ресурсы

При изучении дисциплины «Групповые свойства дифференциальных уравнений» обучающиеся обеспечены доступом (удаленный доступ) к ресурсам:

– **общие информационные, справочные и поисковые:**

1. Справочная правовая система «Гарант». URL: <http://www.garant.ru>
2. Справочно-информационная система «Консультант Плюс». URL: <http://www.consultant.ru/>

– **к современным профессиональным базам данных:**

№п/п	Наименование электронного ресурса	Краткая характеристика	Адрес сайта	Наименование организации-владельца; реквизиты договора	Условия доступа
1.	<b>Научная электронная библиотека (НЭБ РФФИ)</b>	Электр. библиотека научных публикаций - около 4000 иностранных и 3900 отечественных научных журналов, рефераты публикаций 20 тыс. журналов, а также описания 1,5 млн. зарубежных и российских диссертаций; 2800 росс. журналов на безвозмездной основе	<a href="http://elibrary.ru">http://elibrary.ru</a>	ООО «НЭБ»	Полный доступ
2.	<b>База данных Science Index (РИНЦ)</b>	Национальная информационно-аналитическая система, аккумулирующая более 6 миллионов публикаций российских авторов, а также информацию об их цитировании из более 4500 российских журналов.	<a href="http://elibrary.ru">http://elibrary.ru</a>	ООО «НЭБ» Лицензионный договор Science Index №SIO-741/2022 от 19.07.2022 г. Активен до 31.07.2023г.	Авторизованный доступ. Позволяет дополнять и уточнять сведения о публикациях ученых КБГУ, имеющих в РИНЦ
3.	<b>ЭБС «Консультант студента»</b>	13800 изданий по всем областям знаний, включает более чем 12000 учебников и учебных пособий для ВО и СПО, 864 наименований журналов и 917 монографий.	<a href="http://www.studmedlib.ru">http://www.studmedlib.ru</a> <a href="http://www.medcollegelibrary.ru">http://www.medcollegelibrary.ru</a>	ООО «Политехресурс» (г. Москва) <b>Договор №310СЛ/08-2021</b> От 30.09.2021 г. Активен до 30.09.2022г.	Полный доступ (регистрация по IP-адресам КБГУ)
4.	<b>«Электронная библиотека технического вуза» (ЭБС)</b>	Коллекция «Медицина (ВО) ГЭОТАР-Медиа. Books in English (книги на английском языке)»	<a href="http://www.studmedlib.ru">http://www.studmedlib.ru</a>	ООО «Политехресурс» (г. Москва)	Полный доступ (регистрация по IP-адресам КБГУ)

	«Консультант студента»)			<b>Договор №701КС/02-2022</b> от 13.04.2022 г. Активен до 19.04.2022г.	
5.	ЭБС «Лань»	Электронные версии книг ведущих издательств учебной и научной литературы (в том числе университетских издательств), так и электронные версии периодических изданий по различным областям знаний.	<a href="https://e.lanbook.com/">https://e.lanbook.com/</a>	ООО «ЭБС ЛАНЬ» (г. Санкт-Петербург) <b>Договор №6ЕП/223</b> от 15.02.2022 г. Активен до 28.02.2023г.	Полный доступ (регистрация по IP-адресам КБГУ)
6.	Национальная электронная библиотека РГБ	Объединенный электронный каталог фондов российских библиотек, содержащий 4 331 542 электронных документов образовательного и научного характера по различным отраслям знаний	<a href="https://nэб.рф">https://нэб.рф</a>	ФГБУ «Российская государственная библиотека» <b>Договор №101/НЭБ/166</b> 6-п от 10.09.2020г. Сроком на 5 лет	Доступ с электронного читального зала библиотеки КБГУ
7.	ЭБС «IPRbooks»	107831 публикаций, в т.ч.: 19071 – учебных изданий, 6746 – научных изданий, 700 коллекций, 343 журнала ВАК, 2085 аудиозаписей.	<a href="http://iprbookshop.ru/">http://iprbookshop.ru/</a>	ООО «Ай Пи Эр Медиа» (г. Саратов) <b>Договор №9200/22П</b> от 08.04.2022 г. Активен до 02.04.2023г.	Полный доступ (регистрация по IP-адресам КБГУ)
8.	ЭБС «Юрайт» для СПО	Электронные версии учебной и научной литературы издательств «Юрайт» для СПО и электронные версии периодических изданий по различным областям знаний.	<a href="https://www.biblio-online.ru/">https://www.biblio-online.ru/</a>	ООО «Электронное издательство ЮРАЙТ» (г. Москва) <b>Договор №192/ЕП-223</b> От 29.10.2021 г. Активен до 31.10.2022 г.	Полный доступ (регистрация по IP-адресам КБГУ)
9.	Polpred.com. Новости. Обзор СМИ. Россия и зарубежье	Обзор СМИ России и зарубежья. Полные тексты + аналитика из 600 изданий по 53 отраслям	<a href="http://polpred.com">http://polpred.com</a>	ООО «Полпред справочники» Безвозмездно (без официального договора)	Доступ по IP-адресам КБГУ
10	Президентская библиотека им. Б.Н. Ельцина	Более 500 000 электронных документов по истории Отечества, российской государственности, русскому языку и праву	<a href="http://www.prlib.ru">http://www.prlib.ru</a>	ФГБУ «Президентская библиотека им. Б.Н. Ельцина» (г. Санкт-Петербург) <b>Соглашение от 15.11.2016г.</b> бессрочный	Авторизованный доступ из библиотеки (ауд. №115,214)



Для эффективного усвоения дисциплины, помимо учебного материала, студентам необходимо пользоваться данными всемирной сети Интернет, такими сайтами, как:

1. Библиотека КБГУ. URL: <http://lib.kbsu.ru>
2. Свободная энциклопедия «Википедия». URL: <https://ru.wikipedia.org/>
3. Служба тематических толковых словарей. URL: <http://glossary.ru/>
4. Электронно-библиотечная система «IPR BOOKS». URL: <http://www.iprbookshop.ru/>
5. Электронно-библиотечная система «Консультант студента». URL: <http://www.studentlibrary.ru/>

#### **7.6. Методические указания по проведению различных учебных занятий, к курсовому проектированию и другим видам самостоятельной работы**

##### ***Методические рекомендации по изучению дисциплины «Групповые свойства дифференциальных уравнений» для обучающихся***

Основной целью освоения дисциплины является приобретение знаний и умений по исследованию групповых свойств дифференциальных уравнений; развитию способностей к самостоятельному использованию приобретенных знаний в своей профессиональной деятельности и формированию соответствующих компетенций.

Приступая к изучению дисциплины, обучающемуся необходимо ознакомиться с тематическим планом занятий, списком рекомендованной учебной литературы. Следует уяснить последовательность выполнения индивидуальных учебных заданий, занести в свою рабочую тетрадь темы и сроки проведения семинаров, написания учебных и творческих работ. При изучении дисциплины обучающиеся выполняют следующие задания: изучают рекомендованную учебную и научную литературу; пишут контрольные работы, выполняют самостоятельные творческие работы, участвуют в выполнении практических заданий. Уровень и глубина усвоения дисциплины зависят от активной и систематической работы на лекциях, изучения рекомендованной литературы, выполнения контрольных письменных заданий.

Курс изучается на лекциях, семинарах, при самостоятельной и индивидуальной работе обучающихся. Обучающийся для полного освоения материала должен не пропускать занятия и активно участвовать в учебном процессе. Для максимальной эффективности изучения необходимо постоянно вести конспект лекций, знать рекомендуемую преподавателем литературу, позволяющую дополнить знания и лучше подготовиться к семинарским занятиям.

В соответствии с учебным планом на каждую тему выделено необходимое количество часов практических занятий, которые проводятся в соответствии с вопросами, рекомендованными к изучению по определенным темам. Обучающиеся должны регулярно готовиться к семинарским занятиям и участвовать в обсуждении вопросов. При подготовке к занятиям следует руководствоваться конспектом лекций и рекомендованной литературой. Тематический план дисциплины, учебно-методические материалы, а также список рекомендованной литературы приведены в рабочей программе.

### ***Методические рекомендации при работе над конспектом во время проведения лекции***

В процессе лекционных занятий целесообразно конспектировать учебный материал. Для этого используются общие и утвердившиеся в практике правила, и приемы конспектирования лекций.

Конспектирование лекций ведется в специально отведенной для этого тетради, каждый лист которой должен иметь поля, на которых делаются пометки из рекомендованной литературы, дополняющие материал прослушанной лекции, а также подчеркивающие особую важность тех или иных теоретических положений.

Целесообразно записывать тему и план лекций, рекомендуемую литературу к теме. Записи разделов лекции должны иметь заголовки, подзаголовки, красные строки. Для выделения разделов, выводов, определений, основных идей можно использовать цветные карандаши и фломастеры.

Названные в лекции ссылки на первоисточники надо пометить на полях, чтобы при самостоятельной работе найти и вписать их. В конспекте дословно записываются определения понятий, категорий и законов. Остальное должно быть записано своими словами.

Каждому студенту необходимо выработать и использовать допустимые сокращения наиболее распространенных терминов и понятий.

### ***Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям***

Практические (семинарские) занятия – составная часть учебного процесса, групповая форма занятий при активном участии студентов. Практические занятия способствуют углубленному изучению наиболее сложных проблем науки и служат основной формой подведения итогов самостоятельной работы обучающихся. Целью практических занятий является углубление и закрепление теоретических знаний, полученных обучающимися на лекциях и в процессе самостоятельного изучения учебного материала, а, следовательно, формирование у них определенных умений и навыков.

В ходе подготовки к семинарскому занятию необходимо прочитать конспект лекции, изучить основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой, выполнить выданные преподавателем практические задания. При этом учесть рекомендации преподавателя и требования программы. Дорабатывать свой конспект лекции, делая в нем соответствующие записи из литературы.

Желательно при подготовке к практическим занятиям по дисциплине одновременно использовать несколько источников, раскрывающих заданные вопросы.

На практических занятиях обучающиеся учатся грамотно излагать проблемы, свободно высказывать свои мысли и суждения, рассматривают ситуации, способствующие развитию профессиональной компетентности. Следует иметь в виду, что подготовка к практическому занятию зависит от формы, места проведения семинара, конкретных заданий и поручений. Это может быть написание доклада, эссе, реферата (с последующим их обсуждением), коллоквиум.

### ***Методические рекомендации по организации самостоятельной работы***

Самостоятельная работа (по В.И. Далю «самостоятельный – человек, имеющий свои твердые убеждения») осуществляется при всех формах обучения: очной и заочной.

Самостоятельная работа обучающихся - способ активного, целенаправленного приобретения студентом новых для него знаний и умений без непосредственного участия в этом процесса преподавателей. Повышение роли самостоятельной работы обучающихся при проведении различных видов учебных занятий предполагает:

- оптимизацию методов обучения, внедрение в учебный процесс новых технологий обучения, повышающих производительность труда преподавателя, активное использование информационных технологий, позволяющих обучающемуся в удобное для него время осваивать учебный материал;
- широкое внедрение компьютеризированного тестирования;
- совершенствование методики проведения практик и научно-исследовательской работы обучающихся, поскольку именно эти виды учебной работы в первую очередь готовят обучающихся к самостоятельному выполнению профессиональных задач;
- модернизацию системы курсового и дипломного проектирования, которая должна повышать роль студента в подборе материала, поиске путей решения задач.

Самостоятельная работа приводит студента к получению нового знания, упорядочению и углублению имеющихся знаний, формированию у него профессиональных навыков и умений. Самостоятельная работа выполняет ряд функций:

- развивающую;
- информационно-обучающую;
- ориентирующую и стимулирующую;
- воспитывающую;
- исследовательскую.

В рамках курса выполняются следующие виды самостоятельной работы:

1. Проработка учебного материала (по конспектам, учебной и научной литературе);
2. Выполнение разноуровневых задач и заданий;
3. Работа с тестами и вопросами для самопроверки;
4. Выполнение итоговой контрольной работы.

Студентам рекомендуется с самого начала освоения курса работать с литературой и предлагаемыми заданиями в форме подготовки к очередному аудиторному занятию. При этом актуализируются имеющиеся знания, а также создается база для усвоения нового материала, возникают вопросы, ответы на которые студент получает в аудитории.

Необходимо отметить, что некоторые задания для самостоятельной работы по курсу имеют определенную специфику. При освоении курса студент может пользоваться библиотекой вуза, которая в полной мере обеспечена соответствующей литературой. Значительную помощь в подготовке к очередному занятию может оказать имеющийся в учебно-методическом комплексе краткий конспект лекций. Он же может использоваться и для закрепления полученного в аудитории материала. Самостоятельная работа студентов предусмотрена учебным планом и выполняется в обязательном порядке. Задания предложены по каждой изучаемой теме и могут готовиться индивидуально или в группе. По необходимости студент может обращаться за консультацией к преподавателю. Выполнение заданий контролируется и оценивается преподавателем.

Для успешного самостоятельного изучения материала сегодня используются различные средства обучения, среди которых особое место занимают информационные технологии разного уровня и направленности: электронные учебники и курсы лекций,

базы тестовых заданий и задач. Электронный учебник представляет собой программное средство, позволяющее представить для изучения теоретический материал, организовать апробирование, тренаж и самостоятельную творческую работу, помогающее студентам и преподавателю оценить уровень знаний в определенной тематике, а также содержащее необходимую справочную информацию. Электронный учебник может интегрировать в себе возможности различных педагогических программных средств: обучающих программ, справочников, учебных баз данных, тренажеров, контролирующих программ.

Для успешной организации самостоятельной работы все активнее применяются разнообразные образовательные ресурсы в сети Интернет: системы тестирования по различным областям, виртуальные лекции, лаборатории, при этом пользователю достаточно иметь компьютер и подключение к Интернету для того, чтобы связаться с преподавателем, решать вычислительные задачи и получать знания. Использование сетей усиливает роль самостоятельной работы студента и позволяет кардинальным образом изменить методику преподавания.

Студент может получать все задания и методические указания через сервер, что дает ему возможность привести в соответствие личные возможности с необходимыми для выполнения работ трудозатратами. Студент имеет возможность выполнять работу дома или в аудитории. Большое воспитательное и образовательное значение в самостоятельном учебном труде студента имеет самоконтроль. Самоконтроль возбуждает и поддерживает внимание и интерес, повышает активность памяти и мышления, позволяет студенту своевременно обнаружить и устранить допущенные ошибки и недостатки, объективно определить уровень своих знаний, практических умений. Самое доступное и простое средство самоконтроля с применением информационно-коммуникационных технологий - это ряд тестов «on-line», которые позволяют в режиме реального времени определить свой уровень владения предметным материалом, выявить свои ошибки и получить рекомендации по самосовершенствованию.

### ***Методические рекомендации по работе с литературой***

Всю литературу можно разделить на учебники и учебные пособия, оригинальные научные монографические источники, научные публикации в периодической печати. Из них можно выделить литературу основную (рекомендуемую), дополнительную и литературу для углубленного изучения дисциплины.

Изучение дисциплины следует начинать с учебника, поскольку учебник – это книга, в которой изложены основы научных знаний по определенному предмету в соответствии с целями и задачами обучения, установленными программой.

При работе с литературой необходимо учитывать, что имеются различные виды чтения, и каждый из них используется на определенных этапах освоения материала.

*Предварительное* чтение направлено на выявление в тексте незнакомых терминов и поиск их значения в справочной литературе. В частности, при чтении указанной литературы необходимо подробнейшим образом анализировать понятия.

*Сквозное чтение* предполагает прочтение материала от начала до конца. Сквозное чтение литературы из приведенного списка дает возможность студенту сформировать свод основных понятий из изучаемой области и свободно владеть ими.

*Выборочное* – наоборот, имеет целью поиск и отбор материала. В рамках данного курса выборочное чтение, как способ освоения содержания курса, должно использоваться при подготовке к практическим занятиям по соответствующим разделам.

*Аналитическое чтение* – это критический разбор текста с последующим его конспектированием. Освоение указанных понятий будет наиболее эффективным в том случае, если при чтении текстов студент будет задавать к этим текстам вопросы. Часть из этих вопросов сформулирована в ФОС в перечне вопросов для собеседования. Перечень этих вопросов ограничен, поэтому важно не только содержание вопросов, но сам принцип освоения литературы с помощью вопросов к текстам.

Целью *изучающего* чтения является глубокое и всестороннее понимание учебной информации. Есть несколько приемов изучающего чтения:

1. Чтение по алгоритму предполагает разбиение информации на блоки: название; автор; источник; основная идея текста; фактический материал; анализ текста путем сопоставления имеющихся точек зрения по рассматриваемым вопросам; новизна.

2. Прием постановки вопросов к тексту имеет следующий алгоритм:

- медленно прочитать текст, стараясь понять смысл изложенного;
- выделить ключевые слова в тексте;
- постараться понять основные идеи, подтекст и общий замысел автора.

3. Прием тезирования заключается в формулировании тезисов в виде положений, утверждений, выводов.

К этому можно добавить и иные приемы: прием реферирования, прием комментирования.

Важной составляющей любого солидного научного издания является список литературы, на которую ссылается автор. При возникновении интереса к какой-то обсуждаемой в тексте проблеме всегда есть возможность обратиться к списку относящейся к ней литературы. В этом случае вся проблема как бы разбивается на составляющие части, каждая из которых может изучаться отдельно от других. При этом важно не терять из вида общий контекст и не погружаться чрезмерно в детали, потому что таким образом можно не увидеть главного.

Подготовка к экзамену должна проводиться на основе лекционного материала, материала практических занятий с обязательным обращением к основным учебникам по курсу. Это позволит исключить ошибки в понимании материала, облегчит его осмысление, прокомментирует материал многочисленными примерами.

### ***Методические рекомендации для подготовки к экзамену***

Экзамен является формой итогового контроля знаний и умений, обучающихся по данной дисциплине, полученных на лекциях, практических занятиях и в процессе самостоятельной работы. Основой для определения оценки служит уровень усвоения обучающимися материала, предусмотренного данной рабочей программой. К экзамену допускаются студенты, набравшие 36 и более баллов по итогам текущего и промежуточного контроля. На экзамене студент может набрать от 15 до 30 баллов.

В период подготовки к экзамену обучающиеся вновь обращаются к учебно-методическому материалу и закрепляют промежуточные знания.

Подготовка обучающегося к экзамену включает три этапа:

- самостоятельная работа в течение семестра;
- непосредственная подготовка в дни, предшествующие экзамену по темам курса;
- подготовка к ответу на экзаменационные вопросы.

При подготовке к экзамену обучающимся целесообразно использовать материалы

лекций, учебно-методические комплексы, нормативные документы, основную и дополнительную литературу.

На экзамен выносятся материал в объеме, предусмотренном рабочей программой учебной дисциплины за семестр. Экзамен проводится в письменной/устной форме.

При проведении экзамена в письменной (устной) форме, ведущий преподаватель составляет экзаменационные билеты, которые включают в себя: тестовые задания; теоретические задания; задачи или ситуации. Формулировка теоретических задания совпадает с формулировкой перечня экзаменационных вопросов, доведенных до сведения обучающихся накануне экзаменационной сессии. Содержание вопросов одного билета относится к различным разделам программы с тем, чтобы более полно охватить материал учебной дисциплины.

В аудитории, где проводится устный экзамен, должно одновременно находиться не более шести студентов на одного преподавателя, принимающего экзамен. На подготовку ответа на билет на экзамене отводится 40 минут.

При проведении письменного экзамена на работу отводится 60 минут.

Результат устного (письменного) экзамена выражается оценками:

1. Оценка «отлично» – от 91 до 100 баллов – теоретическое содержание курса освоено полностью, без пробелов, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы. Все предусмотренные программой обучения учебные задания выполнены, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к максимальному. На экзамене студент демонстрирует глубокие знания предусмотренного программой материала, умеет четко, лаконично и логически последовательно отвечать на поставленные вопросы.

2. Оценка «хорошо» – от 81 до 90 баллов – теоретическое содержание курса освоено, необходимые практические навыки работы сформированы, выполненные учебные задания содержат незначительные ошибки. На экзамене студент демонстрирует твердые знания основного (программного) материала, умеет четко, грамотно, без существенных неточностей отвечать на поставленные вопросы.

3. Оценка «удовлетворительно» – от 61 до 80 баллов – теоретическое содержание курса освоено не полностью, необходимые практические навыки работы сформированы частично, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. На экзамене студент демонстрирует знание только основного материала, ответы содержат неточности, слабо аргументированы, нарушена последовательность изложения материала.

5. Оценка «неудовлетворительно» от 36 до 60 баллов – теоретическое содержание курса не освоено, необходимые практические навыки работы не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки, дополнительная самостоятельная работа над материалом курса не приведет к существенному повышению качества выполнения учебных заданий. На экзамене студент демонстрирует незнание значительной части программного материала, существенные ошибки в ответах на вопросы, неумение ориентироваться в материале, незнание основных понятий дисциплины.

### ***Методические рекомендации для курсовой работы***

Смысл написания курсовой работы состоит в приобретении студентом навыков самостоятельного решения практических проблем с научных позиций и письменного изложения полученных результатов по выбранной теме (теоретическая часть,

формирование и закрепление системы знаний, умений и навыков по данной теме, самостоятельного проведения различных этапов исследования).

Порядок подготовки курсовой работы содержит следующие этапы:

- выбор темы и согласование ее с научным руководителем;
- формирование структуры курсовой работы;
- сбор материала и его обработка;
- подбор литературы по теме, подготовка библиографии изучаемого вопроса;
- формирование основных теоретических положений, выводов и рекомендаций;
- подготовка и оформление курсовой работы;
- сдача подготовленной курсовой работы научному руководителю;
- доработка текста по замечаниям научного руководителя.

При выполнении курсовой работы студенту необходимо систематически консультироваться с научным руководителем по вопросам написания работы (план работы, методика написания, анализ полученных результатов).

Курсовая работа должна состоять из следующих частей:

- титульный лист,
- содержание (оглавление),
- введение,
- основной текст (разбитый на пункты и подпункты),
- заключение,
- список использованных источников и литературы,
- приложения.

*Титульный лист.* Титульный лист является первой страницей курсовой работы и выполняется строго по образцу, приведенному на кафедре.

*Содержание (оглавление).* Содержание (оглавление) отражает структуру курсовой работы и помещается после титульного листа. Оглавление включает в себя: список принятых сокращений; введение; наименования всех глав, пунктов и подпунктов; заключение; список использованных источников и литературы; приложения с указанием номеров страниц, с которых они начинаются. Нумерация страниц оформляется арабскими цифрами. Наименования глав не должны повторять название курсовой работы, а заголовки пунктов – названия глав.

*Введение.* Курсовая работа начинается с введения. Во введении автор должен показать актуальность избранной проблемы, степень ее разработанности в литературе, новизну темы, связь данного исследования с другими научно-исследовательскими работами. Здесь формулируются цель и задачи исследования, указываются объект, предмет, методика и методология исследования, обосновывается структура работы.

*Основная часть.* В основной части автор раскрывает содержание курсовой работы. Основная часть отражает итоги теоретической и практической работы студента, проведенной по избранной теме, содержит результаты исследования, выводы и конкретные предложения по проблеме. Основная часть курсовой работы делится на главы. Главы основной части могут делиться на пункты и подпункты. Каждый пункт должен содержать законченную информацию.

*Заключение.* В заключении автор подводит итоги исследования в соответствии с определенными во введении задачами курсовой работы, делает теоретические обобщения, формулирует выводы и практические рекомендации.

*Список использованных источников и литературы.* Список должен содержать перечень источников и литературы, использованных при выполнении курсовой работы. Образец оформления списка использованных источников и примеры библиографического описания приведены в <http://www.ipr-ras.ru/gost-2008-references.pdf>.

*Приложения.* Приложение оформляют как продолжение курсовой работы на ее последующих страницах и располагают в порядке появления ссылок на них в тексте работы. В приложения рекомендуется включать материалы, связанные с выполнением курсовой работы, которые по каким-либо причинам не могут быть включены в основную часть исследования. По содержанию приложения разнообразны. Это могут быть копии подлинных документов, выдержки из отчетных материалов, протоколов, отдельные положения из инструкций и правил, ранее не опубликованные тексты, переписка. По форме они могут представлять собой текст, таблицы, графики, схемы. Каждое приложение, как правило, имеет самостоятельное значение, поэтому оно должно начинаться с новой страницы, иметь тематический заголовок, напечатанный прописными буквами. В правом верхнем углу над заголовком прописными буквами должно быть напечатано слово «приложение». Если приложений в курсовой работе более одного, их следует пронумеровать арабскими цифрами (без знака №), например: ПРИЛОЖЕНИЕ 1, ПРИЛОЖЕНИЕ 2 и т. д. Рисунки, таблицы и схемы, помещаемые в приложении, нумеруют арабскими цифрами в пределах каждого приложения, например: «Рис. 1.1» (первый рисунок первого приложения); «Таблица 1.2» (вторая таблица первого приложения).

Правила оформления курсовой работы предусматривают единый порядок использования и размещения текста работы, а также приложений, применение стандартного формата бумаги, наличие иллюстративного материала (чертежей, схем и т.д.). Изложение текста и включенные иллюстрации и таблицы должны соответствовать формату А4. Документ должен быть выполнен с использованием компьютера и принтера, и соответствовать следующим требованиям: заполняется только одна сторона листа; шрифт Times New Roman, кегль 14; интервал печати -1,5; левое поле - 30 мм, правое - 10 мм, верхнее и нижнее - 20 мм; цвет печати текста - черный.

#### ***Критерии оценивания курсовой работы:***

**Оценка курсовой работы "отлично".** Курсовая работа будет оценена педагогом на «отлично», если во введении приводится обоснование выбора конкретной темы, полностью раскрыта актуальность её в научной отрасли, чётко определены грамотно поставлены задачи и цель курсовой работы. Основная часть работы демонстрирует большое количество прочитанных автором работ. В ней содержатся основные термины и они адекватно использованы. Критически прочитаны источники: вся необходимая информация проанализирована, вычленена, логически структурирована. Присутствуют выводы и грамотные обобщения. В заключении сделаны логичные выводы, а собственное отношение выражено чётко. Автор курсовой работы грамотно демонстрирует осознание возможности применения исследуемых теорий, методов на практике. Приложение содержит цитаты и таблицы, иллюстрации и диаграммы: все необходимые материалы. Курсовая работа написана в стиле академического письма (использован научный стиль изложения материала). Автор адекватно применял терминологию, правильно оформил ссылки. Оформление работы соответствует требованиям ГОСТ, библиография,



приложения оформлены на отличном уровне. Объём работы заключается в пределах от 15 до 30 страниц.

**Оценка курсовой работы "хорошо".** Курсовая работа на «хорошо» во введении содержит некоторую нечёткость формулировок. В основной её части не всегда проводится критический анализ, отсутствует авторское отношение к изученному материалу. В заключение неадекватно использована терминология, наблюдаются незначительные ошибки в стиле, многие цитаты грамотно оформлены. Допущены незначительные неточности в оформлении библиографии, приложений.

**Оценка курсовой работы «удовлетворительно».** Курсовая работа на «удовлетворительно» во введении содержит лишь попытку обоснования выбора темы и актуальности, отсутствуют чёткие формулировки. Расплывчато определены задачи и цели. Основное содержание - пересказ чужих идей, нарушена логика изложения, автор попытался сформулировать выводы. В заключении автор попытался сделать обобщения, собственного отношения к работе практически не проявил. В приложении допущено несколько грубых ошибок. Не выдержан стиль требуемого академического письма по проекту в целом, часто неверно употребляются научные термины, ссылки оформлены неграмотно, наблюдается плагиат.

**Оценка курсовой работы «неудовлетворительно».** При оценивании такой курсовой работы, ее недостатки видны сразу. Курсовая работа на «неудовлетворительно» во введении не содержит обоснования темы, нет актуализации темы. Не обозначены и цели, задачи проекта. Скупое основное содержание указывает на недостаточное число прочитанной литературы. Внутренняя логика всего изложения проекта слабая. Нет критического осмысления прочитанного, как и собственного мнения. Нет обобщений, выводов. Заключение таковым не является. В нём не приведены грамотные выводы. Приложения либо вовсе нет, либо оно недостаточно. В работе наблюдается отсутствие ссылок, плагиат, не выдержан стиль, неадекватное использование терминологии. По оформлению наблюдается ряд недочётов: не соблюдены основные требования ГОСТ, а библиография с приложениями содержат много ошибок. Менее 10 страниц объём всей работы.

## **8. Материально-техническое обеспечение дисциплины**

### **8.1. Требования к материально-техническому обеспечению**

Для реализации рабочей программы дисциплины имеются специальные помещения для проведения занятий лекционного и семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы и помещения для хранения и профилактического обслуживания оборудования. Специальные помещения укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления информации большой аудитории.

Для проведения занятий лекционного типа имеются демонстрационное оборудование и учебно-наглядные пособия. По дисциплине «Введение в элементарную математику» имеются презентации по отдельным темам курса, позволяющие наиболее эффективно освоить представленный учебный материал.

При проведении занятий лекционного/ семинарского типа занятий используются:  
*лицензионное программное обеспечение:*

- программное обеспечение средств антивирусной защиты Kaspersky Endpoint Security для бизнеса - Стандартный Russian Edition. 1000-1500 Node 1 year Educational Renewal License (KL4863RAVFQ);

- программное обеспечение для работы с PDF-документами. ABBYY FineReader 15 Business.

- программное обеспечение для работы с документами формата PDF Acrobat Pro DC for teams ALL Multiple Platforms Multi European Languages Level 1 (1-9) Education Named License 65297997BB01A12

- офисное программное обеспечение МойОфис Стандартный

*свободно распространяемые программы:*

- Web Browser – Firefox;
- AcademicMarthCADLicense - математическое программное обеспечение, которое позволяет выполнять, анализировать важнейшие инженерные расчеты и обмениваться ими;
- 7zip - программ для сжатия и распаковки файлов;
- AdobeReader– программа для чтения PDF файлов;
- DjvuReader – приложения для распознавания, конвентирования и работы с Djvu файлами.

При осуществлении образовательного процесса студентами и преподавателем используются следующие информационно справочные системы: ЭБС «АйПиЭрбукс», ЭБС «Консультант студента», СПС «Консультант плюс», СПС «Гарант».

## **8.2 Особенности реализации дисциплины для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья**

Для студентов с ограниченными возможностями здоровья созданы специальные условия для получения образования. В целях доступности получения высшего образования по образовательным программам инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья университетом обеспечивается:

1. Альтернативная версия официального сайта в сети «Интернет» для слабовидящих;

2. Для инвалидов с нарушениями зрения (слабовидящие, слепые) - присутствие ассистента, оказывающего обучающемуся необходимую помощь, дублирование вслух справочной информации о расписании учебных занятий; наличие средств для усиления остаточного зрения, брайлевской компьютерной техники, видеоувеличителей, программ не визуального доступа к информации, программ-синтезаторов речи и других технических средств приема-передачи учебной информации в доступных формах для студентов с нарушениями зрения;

3. Для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья по слуху (слабослышащие, глухие) – звукоусиливающая аппаратура, мультимедийные средства и другие технические средства приема-передачи учебной информации в доступных формах;

4. Для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья, имеющих нарушения опорно-двигательного аппарата, созданы материально-технические условия обеспечивающие возможность беспрепятственного доступа обучающихся в учебные помещения, объекты питания, туалетные и другие помещения университета, а также

пребывания в указанных помещениях (наличие расширенных дверных проемов, поручней и других приспособлений).

Обучающиеся из числа лиц с ограниченными возможностями здоровья обеспечены электронными образовательными ресурсами в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья.

Обучающимся с ограниченными возможностями здоровья предоставляются специальные учебники и учебные пособия, иная учебная литература, специальные технические средства обучения коллективного и индивидуального пользования, предоставление услуг ассистента (помощника), оказывающего обучающимся необходимую техническую помощь, а также услуги сурдопереводчиков и тифлосурдопереводчиков.

а) для слабовидящих:

- на экзамене присутствует ассистент, оказывающий студенту необходимую техническую помощь с учетом индивидуальных особенностей (он помогает занять рабочее место, передвигаться, прочитать и оформить задание, в том числе записывая под диктовку);

- задания для выполнения, а также инструкция о порядке проведения зачете/экзамена оформляются увеличенным шрифтом;

- задания для выполнения на экзамене зачитываются ассистентом;

- письменные задания выполняются на бумаге, надиктовываются ассистенту;

- обеспечивается индивидуальное равномерное освещение не менее 300 люкс;

- студенту для выполнения задания при необходимости предоставляется увеличивающее устройство;

в) для глухих и слабослышащих:

- на зачете/экзамене присутствует ассистент, оказывающий студенту необходимую техническую помощь с учетом индивидуальных особенностей (он помогает занять рабочее место, передвигаться, прочитать и оформить задание, в том числе записывая под диктовку);

- зачет/экзамен проводится в письменной форме;

- обеспечивается наличие звукоусиливающей аппаратуры коллективного пользования, при необходимости поступающим предоставляется звукоусиливающая аппаратура индивидуального пользования;

- по желанию студента экзамен может проводиться в письменной форме;

д) для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата (тяжелыми нарушениями двигательных функций верхних конечностей или отсутствием верхних конечностей):

- письменные задания выполняются на компьютере со специализированным программным обеспечением или надиктовываются ассистенту;

- по желанию студента экзамен проводится в устной форме.

## ЛИСТ

### изменений (дополнений) в рабочей программе

дисциплины «Групповые свойства дифференциальных уравнений» по направлению подготовки 01.03.01 Математика (уровень бакалавриата) (образовательная программа Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление) на \_\_\_\_\_ учебный год

№ п/п	Элемент (пункт) РПД	Перечень выносимых изменений (дополнений)	Примечание

Обсуждена и рекомендована на заседании кафедры алгебры и дифференциальных уравнений

протокол № \_\_\_\_\_ от «\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_\_\_ г.

И.о. заведующего кафедрой \_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_ /  
подпись, расшифровка подписи, дата

Распределение баллов текущего и рубежного контроля

№п/п	Вид контроля	Сумма баллов			
		Общая сумма	1-я точка	2-я точка	3-я точка
1	Посещение занятий	до 10 баллов	до 3 б.	до 3 б.	до 4 б.
2	Текущий контроль:	до 24 баллов	до 8 б.	до 8б.	до 8 б.
	Ответ на 4 вопроса	от 0 до 12 б.	от 0 до 4 б.	от 0 до 4 б.	от 0 до 4 б.
	Полный правильный ответ	до 12 баллов	4 б.	4 б.	4 б.
	Неполный правильный ответ	от 3 до 12 б.	от 1 до 4 б.	от 1 до 4 б.	от 1 до 4 б.
	Ответ, содержащий неточности, ошибки	0б.	0б.	0б.	0б.
	Выполнение самостоятельных заданий (решение задач)	от 0 до 12 б.	от 0 до 4 б.	от 0 до 4 б.	от 0 до 4 б.
3	Рубежный контроль	до 36 баллов	до 12 б.	до 12 б.	до 12 б.
	тестирование	от 0- до 15 б.	от 0- до 5 б.	от 0- до 5 б.	от 0- до 5 б.
	контрольная работа	от 0 до 21 б.	от 0 до 7 б.	от 0 до 7 б.	от 0 до 7 б.
4	Курсовая работа	до 70 баллов	до 23б.	до 23 б.	до 24 б.
	Итого сумма текущего и рубежного контроля	до 70 баллов	до 23б.	до 23 б.	до 24 б.
	Первый этап (базовый уровень) – оценка «удовлетворительно»	не менее 36 б.	не менее 12 б.	не менее 12 б.	не менее 12 б.
	Второй этап (продвинутый уровень) – оценка «хорошо»	менее 70 б. (51-69 б.)	менее 23 б.	менее 23 б.	менее 24б.
	Третий этап (высокий уровень) - оценка «отлично»	не менее 70 б.	не менее 23 б.	не менее 23 б.	не менее 24б.

## Шкала оценивания планируемых результатов обучения

## Текущий и рубежный контроль

Семестр	Шкала оценивания			
	<i>0-35 баллов</i>	<i>36-50 баллов</i>	<i>51-60 баллов</i>	<i>56-70 баллов</i>
VII	Частичное посещение аудиторных занятий. Неудовлетворительное выполнение лабораторных и практических работ. Плохая подготовка к балльно-рейтинговым мероприятиям. Студент не допускается к промежуточной аттестации	Полное или частичное посещение аудиторных занятий. Частичное выполнение практических работ. Выполнение контрольных работ, тестовых заданий на оценку «удовлетворительно».	Полное или частичное посещение аудиторных занятий. Полное выполнение практических работ. Выполнение контрольных работ, тестовых заданий на оценки «хорошо».	Полное посещение аудиторных занятий. Полное выполнение практических занятий. Выполнение контрольных работ, тестовых заданий на оценки «отлично».

## Промежуточная аттестация (экзамен)

Семестр	Шкала оценивания			
	Неудовлетворительно (36-60 баллов)	Удовлетворительно (61-80 баллов)	Хорошо (81-90 баллов)	Отлично (91-100 баллов)
VII	Студент имеет 36-60 баллов по итогам текущего и рубежного контроля, на экзамене не дал полного ответа ни на один вопрос. Студент имеет 36-45 баллов по итогам текущего и рубежного контроля, на экзамене дал полный ответ только на один вопрос.	Студент имеет 36-50 баллов по итогам текущего и рубежного контроля, на экзамене дал полный ответ на один вопрос и частично (полностью) ответил на второй. Студент имеет 46-60 баллов по итогам текущего и рубежного контроля, на экзамене дал полный ответ на один вопрос или частично ответил на все вопросы. Студент имеет по итогам текущего и рубежного контроля 61-70 баллов на экзамене не дал полного ответа ни на один вопрос.	Студент имеет 51-60 баллов по итогам текущего и рубежного контроля, на экзамене дал полный ответ на один вопрос и частично (полностью) ответил на второй. Студент имеет 61 – 65 баллов по итогам текущего и рубежного контроля, на экзамене дал полный ответ на один вопрос и частично ответил на второй. Студент имеет 66-70 баллов по итогам текущего и рубежного контроля, на экзамене дал полный ответ только на один вопрос.	Студент имеет 61-70 баллов по итогам текущего и рубежного контроля, на экзамене дал полный ответ на один вопрос и частично (полностью) ответил на второй.

