

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**  
**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение**  
**высшего образования «Кабардино-Балкарский государственный университет**  
**им. Х.М. Бербекова» (КБГУ)**

**ИНСТИТУТ ФИЗИКИ И МАТЕМАТИКИ**  
**КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ**

**СОГЛАСОВАНО**

Руководитель образовательной  
программы \_\_\_\_\_ **А.Х. Журтов**  
« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ **2022 г.**

**УТВЕРЖДАЮ**

Директор ИФ и М  
\_\_\_\_\_ **Б.И. Кунижев**  
« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ **2022 г.**

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**  
**«ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ»**  
(код и наименование дисциплины)

Направление подготовки  
01.03.01 - Математика  
(код и наименование направления подготовки)

Профиль подготовки  
Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление  
(наименование профиля подготовки)

Квалификация (степень) выпускника  
бакалавр

Форма обучения  
очная

**Нальчик 2022**

Рабочая программа дисциплины «Вариационное исчисление и методы оптимизации» /сост. М.М. Кармоков – Нальчик: КБГУ, 2022. – 46с.

Рабочая программа дисциплины предназначена для студентов *очной* формы обучения по направлению подготовки 01.03.01 – Математика профиль «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление» в 7 семестре, 4 курса.

Рабочая программа составлена с учетом Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 01.03.01 – Математика (уровень бакалавриата) утвержденного приказом Министерства образования и науки РФ от 10 января 2018 г. №8 (Зарегистрировано в Минюсте России 06 февраля 2018 г. № 49941).

## Содержание

1. Цель и задачи освоения дисциплины .....	4
2. Место дисциплины в структуре ОПОП ВО .....	4
3. Требования к результатам освоения содержания дисциплины.....	5
4. Содержание и структура дисциплины .....	6
4.1. Содержание дисциплины .....	6
4.2. Структура дисциплины .....	8
4.3. Лекционные занятия.....	8
4.4. Практические занятия .....	8
4.5. Самостоятельное изучение разделов дисциплины .....	9
5. Оценочные материалы для текущего и рубежного контроля успеваемости и промежуточной аттестации .....	10
6. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности .....	31
7. Учебно-методическое обеспечение дисциплины .....	33
7.1. Нормативно-законодательные акты .....	33
7.2. Основная литература.....	34
7.3. Дополнительная литература .....	34
7.4. Периодические издания .....	34
7.5. Интернет-ресурсы .....	35
7.6. Методические указания к практическим работам .....	37
7.7. Методические указания по проведению различных учебных занятий, к курсовому проектированию и другим видам самостоятельной работы .....	38
8. Материально-техническое обеспечение дисциплины .....	43
8.1. Требования к материально-техническому обеспечению .....	43
8.2. Особенности реализации дисциплины для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья .....	44
Лист изменений (дополнений) в рабочей программе дисциплины .....	46

## **1. Цель и задачи освоения дисциплины**

Цель курса – изложить основы аналитических методов определения решения экстремальных задач и классического вариационного исчисления, а также эффективных вычислительных способов получения приближенного решения. Обсудить основные идеи и методологию теории оптимального управления Понтрягина. Изложить основную идею преобразования вариационных задач (выявление двойственных вариационных задач) и построения на их основе аппроксимаций искомого решения.

Курс занимает важное место среди прикладных математических дисциплин. В процессе работы над курсом студенты должны на основе рассмотренных примеров освоить процедуру построения математических моделей социальных, экономических, физических процессов и явлений, изучить методы исследований возникающих при этом математических задач, научиться делать физические выводы из полученных математических результатов.

В результате изучения данного курса студенты должны овладеть следующими основными понятиями:

- Выпуклое множество и выпуклая функция, гиперплоскость опорная и разделяющая, конус, проекция.
- Задачи линейного программирования, угловая точка, канонический вид задачи, двойственные задачи.
- Методы нелинейного программирования, седловая точка, метод Лагранжа.
- Теорема Куна-Таккера, теорема Фаркаша, теоремы отделимости.
- Транспортные задачи.
- Функционал, простейшая задача вариационного исчисления, канонический вид уравнений Эйлера, изопериметрические задачи.
- Задача Больца, задача Майера, слабый экстремум, условие Якоби, сильный экстремум, инвариантный интеграл Гильберта.
- Принцип максимума Понтрягина, линейная задача оптимального быстрогодействия.
- Приближенные методы решения вариационных задач.

Студенты должны уметь:

- Пользоваться перечисленными понятиями для анализа разных ситуаций.
- Проводить доказательства (выводить формулы) в несложных ситуациях.
- Решать простые, стандартные задачи математического программирования и вариационного исчисления, а также задач оптимального управления.
- Строить математические модели социальных, экономических, физических процессов и явлений, делать выводы из полученных математических результатов.
- Студенты должны быть знакомы с учебной и научной литературой по «Вариационному исчислению и методам оптимизации».

## **2. Место дисциплины в структуре ОПОП ВО**

Дисциплина «Вариационное исчисление и методы оптимизации» относится к первому блоку и принадлежит его вариативной части основной образовательной программы по направлению подготовки 01.03.01 Математика, профиль «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление».

Приступая к изучению данной дисциплины обучающийся должен освоить следующие дисциплины:

- Математический анализ
- Алгебра
- Дифференциальные уравнения
- Функциональный анализ

В результате освоения данной дисциплины, полученные знания будут необходимы как предшествующие при изучении дисциплин магистерской программы «Уравнения в частных производных».

### **3. Требования к результатам освоения содержания дисциплины**

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование элементов следующей профессиональной компетенции (ПКС) в соответствии с ФГОС ВО и ОПОП ВО по данному направлению подготовки:

- Способен публично представлять собственные и известные научные результаты (ПКС-3).

*Индикаторы достижения компетенции ПКС-3:*

**ПКС-3.1.** Способен публично представлять результаты собственных исследований.

**ПКС-3.2.** Способен изучить новейшие результаты исследований и применить их в профессиональной деятельности.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

**знать:** основные понятия и определения дифференциального исчисления и выпуклого анализа; численные методы минимизации функции одной переменной; методы Фибоначчи и золотого сечения; метод ломанных; метод касательных и метод Ньютона; основы теории вариационного исчисления; основы теории решения вариационных задач с подвижными концами; простейшие задачи с подвижными границами; основные понятия и определения теории оптимального управления; принцип максимума Понтрягина; методы приближенного решения краевой задачи принципа максимума.

**уметь:** составлять экономико-математические модели; решать задачи с использованием методов линейного, нелинейного и динамического программирования; решать вариационные задачи с подвижными и неподвижными границами в механике; находить экстремум функций одной и многих переменных методами одномерной и многомерной оптимизации; решать задачи оптимального управления системами с сосредоточенными параметрами (с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений) и системами с распределенными параметрами (с помощью дифференциальных уравнений в частных производных).

**Владеть** методами вариационного исчисления и оптимизации.

**Приобрести опыт деятельности** в применении комплекса знаний, умений и владений для самостоятельного конструирования способа решения нестандартных практико-ориентированных заданий.

**Развить** способности к научно-исследовательской деятельности.

## 4. Содержание и структура дисциплины

### 4.1. Содержание дисциплины

№ раздела	Наименование раздела	Содержание раздела	Код контролируемых компетенций(или их части)	Форма текущего контроля
1	2	3	4	5
1	<i>Предмет и история развития МО.</i>	Задача о брахистохроне. Задача о геодезических линиях. Изопериметрическая задача.	ПКС-3	ДЗ, КР, К, РК, Т
2	<i>Элементы выпуклого анализа.</i>	Свойства выпуклых функций на выпуклых множествах. Теорема отделимости.	ПКС-3	ДЗ, КР, К, РК, Т
3	<i>Элементы линейного программирования.</i>	Основная задача линейного программирования. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования. Определение опорного и оптимального планов. Метод искусственного базиса. Модифицированный симплексный метод. Транспортная задача. Нахождение опорного плана методом северо-западного угла и методом минимального элемента.	ПКС-3	ДЗ, КР, К, РК, Т
4	<i>Теорема Куна - Таккера. Двойственная задача.</i>	Мат. постановка задач оптимизации. Разрешимость и классификация ЗО. Сводимость одного класса задач к задачам другого класса. Необх. и дост. усл. е опт. в случае дифф. ф-ий.	ПКС-3	ДЗ, КР, К, РК, Т
5	<i>Нелинейное программирование.</i>	Экономическая и геометрическая интерпретация задач нелинейного программирования. Метод множителей Лагранжа. Методы минимизации функций одной переменной. Поиск отрезка,	ПКС-3	ДЗ, КР, К, РК, Т

		содержащего точку минимума. Метод Фибоначчи. Метод золотого сечения		
6	<i>Многоэкстремальные задачи. Методы минимизации функций многих переменных.</i>	Метод градиентного спуска. Метод наискорейшего спуска. Метод сопряженных направлений. Методы безусловной минимизации, использующие вторые производные функции. Метод Ньютона и модифицированный метод Ньютона.	ПКС-3	ДЗ, КР, К, РК, Т
7	<i>МО при наличии ограничений.</i>	Выпуклые множества и конусы. Выпуклые функции и опорные функционалы. Условия экстремума в задачах нелинейного программирования.	ПКС-3	ДЗ, КР, К, РК, Т
8	<i>Задачи вариационного исчисления.</i>	Функционал. Вариация функционала и ее свойства. Уравнение Эйлера. Поле экстремалей. Достаточные условия экстремума функционала. Условный экстремум	ПКС-3	ДЗ, КР, К, РК, Т
9	<i>Вариационные задачи с подвижными и неподвижными концами.</i>	Уравнение Эйлера - Пуассона. Простейшая задача с подвижными границами. Задачи с подвижными границами для различных видов функционалов. Геодезическое расстояние.	ПКС-3	ДЗ, КР, К, РК, Т
10	<i>Принцип максимума Понтрягина в задачах оптимального управления.</i>	Начальные понятия теории управляемых систем. Общая формулировка задачи оптимального управления. Принцип максимума Понтрягина для задач с закрепленными концами. Задача оптимального управления с подвижными концами.	ПКС-3	ДЗ, КР, К, РК, Т

В графе 5 приводятся планируемые формы текущего контроля: защита лабораторной работы (ЛР), выполнение курсового проекта (КП), контрольной работы (КР), расчетно-графического задания (РГЗ), домашнего задания (ДЗ) написание реферата (Р), эссе (Э), коллоквиум (К), рубежный контроль (РК), тестирование (Т) и т.д.

#### 4.2. Структура дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетные единицы (108 часов).

Вид работы	Трудоемкость, часов	
	7 семестр	Всего
<b>Общая трудоемкость (в часах)</b>	<b>108</b>	<b>108</b>
<b>Контактная работа (в часах):</b>	<b>28</b>	<b>28</b>
<i>Лекции (Л)</i>	14	14
<i>Практические занятия (ПЗ)</i>	14	14
<b>Самостоятельная работа (в часах), в том числе контактная работа:</b>	<b>80</b>	<b>80</b>
<i>Самостоятельное изучение разделов</i>	53	53
Подготовка и прохождение промежуточной аттестации	27	27
<b>Вид промежуточной аттестации</b>	<b>экзамен</b>	<b>экзамен</b>

#### 4.3. Лекционные занятия

№ п/п	Тема
1	Предмет и история развития МО.
2	Элементы выпуклого анализа.
3	Элементы линейного программирования.
4	Теорема Куна -Таккера. Двойственная задача.
5	Нелинейное программирование.
6	Многоэкстремальные задачи. Методы минимизации функций многих переменных.
7	МО при наличии ограничений.
8	Задачи вариационного исчисления.
9	Вариационные задачи с подвижными и неподвижными концами.
10	Принцип максимума Понтрягина в задачах оптимального управления.

#### 4.4. Практические занятия

№ п/п	Тема
1	<b>Элементы выпуклого анализа.</b> Геометрия выпуклых множеств.



2	<b>Задачи линейного программирования.</b> Симплексный метод. Транспортная задача.
3	<b>Численные методы минимизации функций одной переменной.</b> Метод ломанных и касательных. Метод Ньютона.
4	<b>Численные методы минимизации функций многих переменных.</b> Выпуклое множество и выпуклые функции. Метод наискорейшего спуска. Метод сопряженных направлений и метод Ньютона.
5	<b>Вариационные задачи с неподвижными концами.</b> Уравнение Эйлера. Уравнение Эйлера –Пуассона.
6	<b>Вариационные задачи с подвижными концами.</b> Нахождение экстремалей функционалов.
7	<b>Принцип максимума Понтрягина.</b> Принцип максимума Понтрягина. Методы приближенного решения задач оптимального управления.

#### 4.5. Самостоятельное изучение разделов дисциплины

№ раздела	Вопросы, выносимые на самостоятельное изучение
1	<b>Элементы выпуклого анализа.</b> Свойства выпуклых функций на выпуклых множествах. (КСР)
2	<b>Элементы линейного программирования.</b> Основная задача линейного программирования. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования. (КСР)
3	<b>Симплексный метод.</b> Определение опорного и оптимального планов. Метод искусственного базиса. Модифицированный симплексный метод. (КСР)
4	<b>Целочисленные задачи линейного программирования.</b> Метод Гомори.
5	<b>Транспортная задача.</b> Нахождение опорного плана методом северо-западного угла и методом минимального элемента. (КСР)
6	<b>Нелинейное программирование.</b> Градиентные методы решения задач нелинейного программирования. Метод штрафных и барьерных функций. (КСР)
7	<b>Методы минимизации функций одной переменной.</b> Поиск отрезка, содержащего точку минимума. Метод золотого сечения. (КСР)
8	<b>Численные методы минимизации функций одной переменной.</b> Метод ломанных и касательных. Метод Ньютона. (КСР)
9	<b>Многоэкстремальные задачи.</b> Методы минимизации функций многих переменных.
10	<b>Вариационные задачи с неподвижными концами.</b> Уравнение Эйлера. Уравнение Эйлера –Пуассона. (КСР)
11	<b>Вариационные задачи с подвижными концами.</b> Нахождение экстремалей функционалов. (КСР)

### **5. Оценочные материалы для текущего и рубежного контроля успеваемости и промежуточной аттестации**

Оценочные материалы предназначены для установления соответствия уровня подготовки обучающихся требованиям Федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования (ФГОС ВО (3++)). Оценочные материалы (ОМ) являются центральным звеном системы оценки качества освоения, обучающимся дисциплины. Целью разработки ОМ по дисциплине является оценка знаний, умений, навыков и уровня освоения обучающимися компетенций дисциплины.

ОМ дисциплины является составной частью рабочей программы дисциплины. Это – *оценочные средства, контрольно-измерительные и методические материалы*, предназначенные для определения качества результатов обучения и уровня сформированности комплектаций, обучающихся в ходе освоения дисциплины.

Оценочные средства формируются на основе ключевых *принципов оценивания*:

- валидность – объекты оценки должны соответствовать поставленным целям обучения;
- надёжность – при оценивании достижений обучающихся должны использоваться единообразные стандарты и критерии;
- развивающего характера – фиксация персональных достижений обучающихся и предполагаемые мероприятия по улучшению результатов;
- своевременность – поддержание обратной связи с обучающимися при освоении учебных материалов.

Формирование оценочных средств дисциплины проходит следующие *этапы*:

- формируется система показателей, характеризующих состояние и динамику развития компетенций обучающихся и выпускников;
- определяются оценочные средства и процедуры оценивания знаний, умений, навыков, овладения компетенциями обучающихся.

Задания для оценивания умений, навыков и (или) опыта деятельности предусматривают выполнение аттестуемыми действий:

- по обработке информации, выделению ее элементов и выявлению взаимосвязи между ними и т.п.;
- по интерпретации и усвоению информации из разных источников, ее системному структурированию;
- по выявлению значения предмета учебной дисциплины для достижения конкретной цели;
- по решению учебных задач.

На проверку накопленных знаний направлены такие формы контроля, как устный опрос, коллоквиум и компьютерное тестирование. Они проводятся в целях побуждения самостоятельной мыслительной деятельности студентов.

Устный опрос учебной проводится с целью выявления и закрепления полученных знаний и умений, определения уровня подготовленности к изучению новой темы.

Коллоквиум предусматривает развёрнутое изложение по определённому вопросу, основанное на привлечении теоретического материала с целью активизации самостоятельной работы обучающегося по изучению материала. Он позволяет оценить умения студентов самостоятельно работать с учебным и научным материалом, выявить объем полученных знаний, полученных на занятиях, а также путем самостоятельной работы.

Компьютерное тестирование проводится для закрепления и проверки знаний, умений и навыков с применением технических средств.

Конечными результатами освоения программы дисциплины являются сформированные когнитивные дескрипторы «знать», «уметь», «владеть», расписанные по отдельным компетенциям. Формирование этих дескрипторов происходит в течение всего семестра по этапам в рамках различного вида знаний и самостоятельной работы.

### **5.1. Оценочные материалы для текущего контроля.**

*Текущий контроль* знаний, умений и владений по дисциплине осуществляется в форме устного или письменного опроса на лекционных, практических занятиях, а также в ходе проведения самостоятельной работы студентов

Цель текущего контроля – оценка результатов работы в семестре и обеспечение своевременной обратной связи, для коррекции обучения, активизации самостоятельной работы обучающегося. Объектом текущего контроля являются конкретизированные результаты обучения (учебные достижения) по дисциплине.

*Текущий контроль* успеваемости обеспечивает оценивание хода освоения дисциплины «Вариационное исчисление и методы оптимизации» и включает: ответы на теоретические вопросы на практическом занятии, решение практических задач и выполнение заданий на практическом занятии. Оценка качества подготовки на основании выполненных заданий ведется преподавателем (с обсуждением результатов), баллы начисляются в зависимости от сложности задания.

### ***Вопросы по темам дисциплины «Вариационное исчисление и методы оптимизации»***

#### **Тема №1 Предмет и история развития МО**

1. Задача о брахистохроне.
2. Задача о геодезических линиях.

#### **Тема №2 Элементы выпуклого анализа**

1. Свойства выпуклых функций на выпуклых множествах.
2. Теорема отделимости.

#### **Тема №3 Элементы линейного программирования**

1. Основная задача линейного программирования.
2. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования.
3. Определение опорного и оптимального планов.
4. Метод искусственного базиса.
5. Модифицированный симплексный метод.
6. Транспортная задача.
7. Нахождение опорного плана методом северо-западного угла и методом минимального элемента.

#### **Тема №4 Теорема Куна -Таккера. Двойственная задача.**

1. Мат. постановка задач оптимизации.
2. Разрешимость и классификация ЗО.
3. Сводимость одного класса задач к задачам другого класса.
4. Необх. и дост. усл.е опт. в случае дифф. ф-ий.

#### **Тема №5 Нелинейное программирование**

1. Экономическая и геометрическая интерпретация задач нелинейного программирования.
2. Метод множителей Лагранжа.
3. Методы минимизации функций одной переменной.
4. Поиск отрезка, содержащего точку минимума.
5. Метод Фибоначчи.
6. Метод золотого сечения

#### **Тема №6 Многоэкстремальные задачи. Методы минимизации функций многих переменных.**

1. Метод градиентного спуска.
2. Метод наискорейшего спуска.
3. Метод сопряженных направлений.
4. Методы безусловной минимизации, использующие вторые производные функции.
5. Метод Ньютона и модифицированный метод Ньютона.

#### **Тема №7 МО при наличии ограничений.**

1. Выпуклые множества и конусы.
2. Выпуклые функции и опорные функционалы.
3. Условия экстремума в задачах нелинейного программирования.

#### **Тема №8 Задачи вариационного исчисления..**

1. Функционал.
2. Вариация функционала и ее свойства.
3. Уравнение Эйлера.
4. Поле экстремалей.
5. Достаточные условия экстремума функционала.
6. Условный экстремум

#### **Тема №9 Вариационные задачи с подвижными и неподвижными концами.**

1. Уравнение Эйлера - Пуассона.
2. Простейшая задача с подвижными границами.
3. Задачи с подвижными границами для различных видов функционалов.
4. Геодезическое расстояние.

#### **Тема №10 Принцип максимума Понтрягина в задачах оптимального управления.**

1. Начальные понятия теории управляемых систем.
2. Общая формулировка задачи оптимального управления.
3. Принцип максимума Понтрягина для задач с закрепленными концами.

#### **Критерии формирования оценок (оценивания) по результатам устного опроса.**

Устный опрос является одним из основных способов учёта знаний обучающегося по дисциплине «Вариационное исчисление и методы оптимизации». Развёрнутый ответ студента должен представлять собой связное, логически последовательное сообщение на заданную тему, показывать его умение применять изучаемые методы при решении практических задач.

В результате устного опроса знания обучающегося оцениваются по ниже следующей шкале.

**Таблица 6. Шкала оценивания**

Количество баллов	Критерии оценивания
5	Обучающийся - полно излагает изученный материал, знает все формулы, применяемые методы и их

	<p>точность;</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- понимает материал, может обосновать свои суждения, применить знания при решении практических задач и лабораторных заданий, а также заданий для самостоятельного выполнения;</li> <li>- излагает материал последовательно и правильно с точки зрения норм литературного языка.</li> </ul>
4	Обучающийся даёт ответ, удовлетворяющий тем же требованиям, что и для «5» баллов, но допускает несущественные ошибки, которые сам же исправляет, и некоторые недочёты в последовательности и оформлении излагаемого материала.
3	<p>Обучающийся обнаруживает знание и понимание основного материала по данной теме, но:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- излагает материал неполно и допускает неточности в определении понятий, знаний методов, их точности;</li> <li>- не умеет достаточно глубоко и доказательно обосновать свои суждения и применять методы;</li> <li>- излагает материал непоследовательно, допускает ошибки.</li> </ul>
2	Обучающийся обнаруживает существенное незнание некоторой части раздела изучаемого материала, допускает ошибки в формулировке и формулах, при оценке точности методов.
1	Обучающийся обнаруживает незнание некоторой части раздела изучаемого материала, допускает существенные ошибки в формулировке и формулах, при оценке точности методов.
0	Обучающийся обнаруживает незнание большей части раздела изучаемого материала и неумение применять их при решении практических задач.

Баллы могут ставиться не только за единовременный ответ, но и за рассредоточенный во времени, т.е. за сумму ответов, данных студентом на протяжении занятия.

### 5.1.2. Оценочные материалы для самостоятельной работы обучающегося ( типовые задачи) (контролируемые компетенции ПКС-3)

Перечень типовых задач для самостоятельной работы сформирован в соответствии с тематикой практических занятий по дисциплине «Вариационное исчисление и методы оптимизации».

Самостоятельная работа оценивается степенью освоения вопросов для самостоятельного изучения (см. таблицу 5) и индивидуальным выполнением заданий к практическим занятиям.

Все задания к практическим занятиям приведены в издании: Кармоков М,М.,Буздов Б.К, Кудяева Ф,Х., . Методы оптимизации. Изд. КБГУ. Нальчик, 2010. 129 с.

#### **Задания**

**Тема: «Элементы выпуклого анализа»**

1. Выяснить будут ли выпуклы множества.

1.1 
$$\begin{aligned} x + 2y &\leq 1, \\ y + 3x &\leq 0. \end{aligned}$$

1.2 
$$\begin{aligned} x + y &\leq 1, \\ x^2 &\leq 1. \end{aligned}$$

1.3 
$$\begin{aligned} x + y &\leq 1, \\ x^2 - y &\leq 1. \end{aligned}$$

2. Определить размерность выпуклых множеств:

$$\begin{aligned} y &= 0, \\ 2.1 \quad x + y &\leq 1, \\ x - y &\leq -1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.2 \quad x + y + z &= 1, \\ x - y + 3z &\leq 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.3 \quad x + y &\leq 1, \\ x - y &\leq 1. \end{aligned}$$

$$2.4 \quad x^2 + y^2 = 1.$$

3. Доказать, что объединение конечного числа выпуклых множеств выпукло.

4. Доказать, что пересечение конечного числа выпуклых множеств выпукло.

5. Множество  $X$  состоит из объединения всех отрезков с концами в точке  $X_0$  принадлежащей множеству  $R_0$  и точки  $Y$ , где  $Y$  принадлежит множеству  $Z$  – выпуклому замкнутому ограниченному множеству, лежащему в  $R_n$ . Доказать что  $\lambda \leq \mu + 1$ , где  $\lambda, \mu$  – размерности множеств  $X, Y$  соответственно.

6. Даны два выпуклых замкнутых множества  $X$  и  $Y$ , причем множество  $Z = X + Y$  тоже выпукло. Доказать что размерность  $X$  равняется размерности  $Y$ .

**Задания.**

**Тема: «Элементы линейного программирования»**

1. Привести к канонической форме следующие задачи

$$\begin{aligned} 1.1. \quad x_1 - x_2 &\rightarrow \max, \\ 2x_1 + x_2 &\geq 1, \\ x_1 - x_2 &\leq 0, \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1.2. \quad 2x_1 + x_2 &\rightarrow \max, \\ x_1 &\geq 1, \\ -2x_1 + 3x_2 &\leq 16, \\ 4x_1 + 5x_2 &\leq 12. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1.3. \quad x_1 - x_2 &\rightarrow \min, \\ x_1 - 2x_2 &\leq 1, \\ -2x_1 + 3x_2 &\leq 16, \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1.4. \quad 2x_1 + x_2 + 5x_3 &\rightarrow \max, \\ 2x_1 + x_3 &\leq 5, \\ 7x_1 - 2x_2 - x_3 &\geq 4, \\ x_1 &\geq 0; \\ -\infty &\leq x_2 \leq \infty, \\ -\infty &\leq x_3 \leq \infty. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1.5. \quad 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 &\rightarrow \min, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &\geq 5, \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 &\leq 11, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq -8, \\ x_2 &\geq 0, x_3 \geq 0; \\ -\infty &\leq x_1 \leq \infty. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1.6. \quad 2x_1 - 3x_2 - x_3 &\rightarrow \min, \\ x_1 - x_2 + x_3 &\geq 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &\geq 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 5, \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -5x_1 + x_2 - x_3 \rightarrow \max, \\
 & 3x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\
 1.7 \quad & x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \leq 1, \\
 & x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \leq 8, \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & x_1 + x_2 \rightarrow \max, \\
 & x_1 + 2x_2 \leq 12, \\
 1.8 \quad & 4x_1 - 6x_2 \geq 10, \\
 & x_1 + x_2 \leq -7, \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -x_1 - 5x_2 + x_3 \rightarrow \max, \\
 & -x_1 + x_2 + x_3 \leq 4, \\
 1.9 \quad & 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geq -1, \\
 & x_1 + 2x_2 \leq -5, \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 5x_1 - x_2 + x_3 \rightarrow \min, \\
 & 3x_1 - x_3 \leq 5, \\
 1.10 \quad & 2x_1 + 3x_2 \geq -1, \\
 & -\infty \leq x_3 \leq 6, \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

2. Найти решения следующих задач, используя свойства задач ЛП:

$$\begin{aligned}
 & x_1 + 2x_2 \rightarrow \max, \\
 2.1 \quad & x_1 + x_2 \leq 1, \\
 & x_1 \leq 2, \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & x_1 + x_2 \rightarrow \min, \\
 2.2 \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 4, \\
 & x_1 - 3x_2 - x_3 = -2, \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & x_1 \rightarrow \max, \\
 2.3 \quad & x_1 + x_2 + x_4 \leq 12, \\
 & x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 \leq 2, \\
 & x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & cx_1 + cx_2 + cx_3 \rightarrow \max, \\
 2.4 \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\
 & -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\
 & x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -x_1 - x_2 + x_3 \rightarrow \min, \\
 2.5 \quad & 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \leq 4, \\
 & x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 \leq -1, \\
 & x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n \rightarrow \max, \\
 2.6 \quad & x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq n, \\
 & x_2 + \dots + x_n \leq n - 1, \\
 & x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 3x_1 + 8x_2 \rightarrow \max, \\
 & -1 \leq x_1 + x_2 \leq 1, \\
 2.7 \quad & -1 \leq -x_1 + x_2 \leq 1, \\
 & -1 \leq x_1 \leq 1, \\
 & x_i \geq 0, i = 1, 2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -x_1 - x_2 - 2x_3 \rightarrow \max, \\
 2.8 \quad & 5x_1 + x_3 \leq 10, \\
 & 5x_2 + x_3 \leq 10, \\
 & x_i \geq 0, i = 1, 2, 3.
 \end{aligned}$$

3. Решить следующие задачи, исходя из геометрической интерпретации задач ЛП:

$$\begin{aligned}
 & 2x_1 + x_2 \rightarrow \max, \\
 3.1 \quad & x_1 + x_2 \leq 1, \\
 & x_1 - x_2 \leq 1, \\
 & x_i \geq 0, i = 1, 2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & x_1 + 2x_2 \rightarrow \min, \\
 3.2 \quad & x_1 + x_2 \leq 1, \\
 & x_1 - x_2 \leq 2, \\
 & x_i \geq 0, i = 1, 2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3.3 \quad & 5x_1 - 10x_2 \rightarrow \min, \\
& x_1 - 2x_2 \leq 1, \\
& x_1 - x_2 \leq 2, \\
& 3x_1 - x_2 \leq 7, \\
& 4x_1 + 3x_2 \geq 0, \\
& x_i \geq 0, i = 1, 2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3.4 \quad & x_1 - 10x_2 + 10x_3 \rightarrow \min, \\
& x_1 + x_2 + x_3 \leq 1, \\
& x_1 - x_2 - x_3 \leq 2, \\
& 2x_1 - x_3 \leq 0, \\
& x_1 + 2x_3 \leq 5, \\
& x_i \geq 0, i = 1, 2, 3.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3.5 \quad & x_1 + x_2 - x_3 \rightarrow \min, \\
& 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\
& x_1 - 2x_2 + x_3 = -2, \\
& x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3.6 \quad & x_1 - x_2 + x_3 \rightarrow \max, \\
& x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\
& x_i \geq 0, i = 1, 2, 3.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3.7 \quad & x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \max, \\
& 2x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\
& x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\
& x_i \geq 0, i = 1, 2, 3.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3.8 \quad & x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \max, \\
& x_1 + x_2 = 1, \\
& x_2 - x_3 = 1, \\
& x_i \geq 0, i = 1, 2, 3.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3.9 \quad & x_1 + x_2 + \dots + x_n \rightarrow \max, \\
& x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n = 1, \\
& x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3.10 \quad & x_1 + \dots + x_3 \rightarrow \max, \\
& x_1 + x_2 = 1, \\
& x_3 + x_4 + \dots + x_n = 1, \\
& x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n.
\end{aligned}$$

3. Решить симплексным методом.

3.1. В соответствии с оперативным планом участок шлифовки за первую неделю декабря выпустил 500 колец для подшипников типа А, 300 колец – для подшипников типа Б 450 – колец для подшипников типа В. Все кольца шлифовались на двух взаимозаменяемых станках раной производительности. Машинное время каждого станка составляет 500 мин. Трудоемкость операций (в минутах на одно кольцо) при изготовлении различных колец характеризуется следующими данными

СТАНКИ	Затраты времени на одно кольцо типов, мин		
	А	Б	В
I	4	10	10
II	6	8	20

Определить оптимальный вариант распределения операций по станкам и время, которое было бы затрачено при этом варианте.

3.2. Возделываются три культуры: овес, кукуруза на силос, многолетник травы на сено. Площадь пашни составляет 500 га. Кроме этого известно, что посевная площадь овса не должна превышать 200га, трудовые ресурсы составляют 3000ч/дн; площадь под кукурузой не более 1/2 от общей площади пашни под этими культурами. Эффективность возделывания кормовых культур приведены в таблице.



N	Культуры	Вывод кормов с 1га, ц к.ед.	Затраты труда на 1га, ч – дн.
1	Овес	25	3
2	Кукуруза на овес	24	2
3	Многодетн. Травы на сено	16	2

Найти оптимальное сочетание посевов этих культур для производства наибольшего количества кормов. Дать экономическое описание оптимального решения.

3.3 При продаже двух видов товаров А и В фирма использует четыре вида ресурсов. Нормы затрат на реализацию 1 ед. товара, объем ресурсов приведен в таблице.

Ресурсы	Нормы затрат ресурсов от реализации 1 ед. товара		Количество ресурсов на предприятия
	А	В	
1	2	2	12
2	1	2	9
3	5	1	14
4	1	5	11

Доход от реализации 1 ед. товара А составляет 2\$, товара В-3\$.

Определить оптимальный план реализации товаров, обеспечивающих торговому предприятию максимальную прибыль.

3.4 Фабрика выпускает изделия двух видов: А и В. На производстве одного изделия вида А рабочий тратит 3 ч, одного изделия вида В – 2 часа. От реализации изделия А фабрика получает прибыль – 80\$, а от реализации изделия В-60\$. Фабрика должна выпустить не менее 100 штук изделия А и не менее 200 штук изделия В. Сколько изделий вида А и В должна выпустить фабрика, чтобы получить наибольшую сумму прибыли, если фонд рабочего времени производственных планов составляет 900 человек?

- |  |  |  |
|--|--|--|
| $x_1 + 2x_2 \rightarrow \max,$<br>$x_1 + x_2 \leq 2,$<br>$x_1 - x_2 \leq 1$<br>$x_i \geq 0, i = 1, 2.$                       | $x_1 + 2x_2 \rightarrow \min,$<br>$x_1 + x_2 \leq -2,$<br>$x_1 - x_2 \leq 1,$<br>$x_i \geq 0, i = 1, 2.$ | $x_1 + x_2 \rightarrow \max,$<br>$x_1 + 2x_2 \leq 3,$<br>$2x_1 + x_2 \leq 3,$<br>$x_i \geq 0, i = 1, 2.$ |
| $x_1 + x_2 \rightarrow \min,$<br>$x_1 + 2x_2 \leq 3,$<br>$2x_1 + x_2 \leq 3,$<br>$x_i \geq 0, i = 1, 2.$                     | $2x_1 \rightarrow \max,$<br>$x_1 + 2x_2 \leq 3,$<br>$2x_1 + x_2 \leq 5,$<br>$x_i \geq 0, i = 1, 2.$      | $x_1 + 2x_2 \rightarrow \max,$<br>$x_1 \leq 11,$<br>$-x_1 + x_2 \leq 24,$<br>$x_i \geq 0, i = 1, 2.$     |
| $-2x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \min,$<br>$-x_1 + 3x_2 \leq 17,$<br>$-x_1 + x_2 + x_3 \leq 10,$<br>$x_i \geq 0, i = 1, 2, 3.$ | $2x_1 + x_2 \rightarrow \min,$<br>$x_1 \leq 4,$<br>$x_2 \leq 4,$<br>$x_i \geq 0, i = 1, 2.$              |  |

4. Решить следующие задачи ЛП методом искусственного базиса:

$$\begin{aligned}
 &2x_1 + 3x_2 + x_3 \rightarrow \min, \\
 &x_1 - 2x_2 - x_3 \geq 1, \\
 1) \quad &2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5, \\
 &x_i \geq 0, i = 1, 2, 3.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &x_1 - x_2 + x_3 \rightarrow \max, \\
 &2x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\
 2) \quad &4x_1 - x_2 - 7x_3 \geq 7, \\
 &x_1 - x_2 \leq 6, \\
 &x_i \geq 0, i = 1, 2, 3.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &3x_1 + x_2 - x_3 \rightarrow \min, \\
 &2x_1 - x_2 + 5x_3 \geq 7, \\
 2) \quad &x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\
 &x_1 + 7x_2 + x_3 \geq 4, \\
 &x_i \geq 0, i = 1, 2, 3.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &x_1 + 4x_2 + x_3 \rightarrow \max, \\
 &5x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 8, \\
 4) \quad &2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\
 &7x_1 - x_2 + 8x_3 \leq 1, \\
 &x_i \geq 0, i = 1, 2, 3.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &x_1 - x_2 + 5x_3 \rightarrow \min, \\
 &2x_1 + x_2 - x_3 \leq -1, \\
 5) \quad &x_1 - x_3 = 5 \\
 &x_i \geq 0, i = 1, 2, 3.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &2x_1 + 8x_2 - 2x_3 \rightarrow \max, \\
 &4x_1 - 3x_2 + x_3 = 7, \\
 6) \quad &x_1 + 5x_2 - 12x_3 \geq 1, \\
 &x_i \geq 0, i = 1, 2, 3.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &5x_1 - 8x_2 \rightarrow \max, \\
 &x_1 + 4x_2 = 7, \\
 7) \quad &2x_1 - 3x_2 \geq 3, \\
 &x_1 + x_2 \leq -5, \\
 &x_i \geq 0, i = 1, 2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &8x_1 + x_2 \rightarrow \min, \\
 &2x_1 + 4x_2 \geq 3, \\
 8) \quad &x_1 - 7x_2 \leq -1, \\
 &x_1 - x_2 = 0, \\
 &x_i \geq 0, i = 1, 2.
 \end{aligned}$$

5. Решить следующие задачи модифицированным симплекс-методом:

$$\begin{aligned}
 &x_1 + 2x_2 - x_3 \rightarrow \max, \\
 &-x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 6, \\
 1) \quad &x_1 + x_2 + 4x_3 \geq 6, \\
 &2x_1 - 2x_2 + x_3 = 2, \\
 &x_i \geq 0, i = 1, 2, 3.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &2x_1 + 3x_2 - 4x_3 \rightarrow \min, \\
 &x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 6, \\
 2) \quad &2x_1 - 6x_2 - x_3 = 7, \\
 &x_1 + x_2 - 8x_3 \leq -2, \\
 &x_i \geq 0, i = 1, 2, 3.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &2x_1 - 2x_2 + 7x_3 \rightarrow \min, \\
 &3x_1 + 4x_2 - x_3 \geq -7, \\
 3) \quad &x_1 - x_2 + 2x_3 = 5, \\
 &11x_1 + x_2 - x_3 \geq 5, \\
 &x_i \geq 0, i = 1, 2, 3.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &x_1 + x_2 - x_3 \rightarrow \max, \\
 &2x_1 - x_2 + 7x_3 = 8, \\
 4) \quad &7x_1 - x_3 \geq 6, \\
 &x_2 + x_3 \leq -3, \\
 &x_i \geq 0, i = 1, 2, 3.
 \end{aligned}$$

- |                                       |                                      |
|---------------------------------------|--------------------------------------|
| $3x_1 - 4x_2 - x_3 \rightarrow \max,$ | $6x_1 + x_4 \rightarrow \min,$       |
| $2x_1 - 3x_2 \geq 7,$                 | $x_1 - x_2 + 2x_4 = 51,$             |
| 5) $x_1 + x_2 - x_3 \leq -3,$         | 6) $x_3 - x_4 \leq -7,$              |
| $7x_1 - 4x_2 + x_3 = 5,$              | $x_1 + 2x_2 - x_4 = 8,$              |
| $x_i \geq 0, i = 1, 2, 3.$            | $x_i \geq 0, i = 1, 2, 3.$           |
| <br>                                  | <br>                                 |
| $3x_1 - 5x_2 - x_3 \rightarrow \max,$ | $x_1 - 6x_2 + x_3 \rightarrow \min,$ |
| $x_1 - x_2 \geq 7,$                   | $3x_1 + x_2 - 7x_3 \geq 6,$          |
| 7) $2x_2 + x_3 = 1,$                  | 8) $2x_1 - x_2 + x_3 = 4,$           |
| $5x_1 - 7x_2 + x_3 = 6,$              | $5x_1 + 3x_2 - x_3 = 2,$             |
| $x_i \geq 0, i = 1, 2, 3.$            | $x_i \geq 0, i = 1, 2, 3.$           |
| <br>                                  | <br>                                 |
| $2x_1 - 4x_2 + x_3 \rightarrow \max,$ | $x_1 + 7x_2 - x_3 \rightarrow \min,$ |
| $x_1 + 3x_2 - 5x_3 \geq 7,$           | $4x_1 - x_2 + 8x_3 \geq 4,$          |
| 9) $2x_1 - 7x_2 + 8x_3 = 6,$          | 10) $4x_1 + x_2 - x_3 = 1,$          |
| $7x_1 + x_2 - 11x_3 = 4,$             | $x_2 - x_3 = 2,$                     |
| $x_i \geq 0, i = 1, 2, 3.$            | $x_i \geq 0, i = 1, 2, 3.$           |

### Задания.

#### Тема: «Численные методы минимизации функций одной переменной»

1. Показать, что если функция  $f(x)$  удовлетворяет условию Липшица, то модуль углового коэффициента любой хорды или касательной к графику  $f(x)$  не превосходит константы Липшица  $L$ .

2. Показать, что если функция удовлетворяет условию Липшица, то она непрерывна на  $(a, b)$ .

3. Найти наименьшую из констант Липшица функции

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 5x + 16 \text{ на отрезке } [0, 10].$$

4. Показать, что если функция  $f(x)$  выпукла на отрезке  $(a, b)$ , то на любом отрезке  $[x', x''] \in [a, b]$  график  $f(x)$  лежит не выше хорды, проходящей через точки графика с абсциссой  $x'$  и  $x''$ .

5. Показать, что если  $f(x)$  – выпуклая дифференцируемая на отрезке  $(a, b)$  функция, то она унимодальна на этом отрезке.

6. Показать, что если  $f(x)$  – выпуклая дифференцируемая функция, то любая касательная к графику  $f(x)$  лежит не выше этого графика.

7. Установить выпуклость функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  и найти ее минимальное значение. Вычисление проверить методом касательных с точностью 0.01 и продолжить

методом Ньютона с точностью  $10^{-6}$ .

1.  $f(x) = -\ln(\cos x) - x^2, \left[\frac{\pi}{4}; \frac{2\pi}{5}\right]$ .
2.  $f(x) = \ln(1 + x^2) - \sin x, \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ .
3.  $f(x) = -2x - x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}, [1,25; 1,75]$
4.  $f(x) = 5e^{-x} + 4x - \frac{x^3}{3}, [0; 0,5]$ .
5.  $f(x) = -2(x+1)e^{-x} - 2\cos x - x, \left[0; \frac{\pi}{6}\right]$ .
6.  $f(x) = \ln x, [0,1; 2]$
7.  $f(x) = x^2 - \sin x, \left[0; \frac{\pi}{42}\right]$ .
8.  $f(x) = x^4 + x^2 + x + 1, [-1; 2]$ .

### Задания.

**Тема: «Численные методы минимизации функций многих переменных»**

1. Выяснить будут ли выпуклы множества, определенные с следующих примерах:

- 1.1  $u = \{(x, y) | x + 2y^2 \leq 1\}$ ;
- 1.2  $u = \{(x, y) | xy > 1, x + y < 4, x > 0, y > 0\}$ ;
- 1.3  $u = \{(x, y) | xy < 1, x > 0, y > 0\}$ ;
- 1.4  $u = \{(x, y) | x - y^2 \leq 0, -x^2 + y \leq 0\}$ ;
- 1.5  $u = \{(x, y, z) | z \geq x^2 + y^2\}$ ;
- 1.6  $u = \{(x, y, z) | z \leq x^2 + y^2\}$ ;
- 1.7  $u = \{(x, y, z) | z \geq xy, x \geq 0, y \geq 0\}$ ;
- 1.8  $u = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ ;
- 1.9  $u = \{(x, y, z) | z + x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ ;
- 1.10  $u = \left\{ (x, y, z) \left| x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{3} \geq 1 \right. \right\}$

2. Минимизировать квадратные функции методом наискорейшего спуска, заканчивая

вычисления при  $\left| \frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_i} \right| \leq 0,01, i = 1, 2, \dots, n$  :

- 2.1  $f(x) = 3x_1^2 - 3x_1x_2 + 4x_2^2 - 2x_1 + x_2$
- 2.2  $f(x) = x_1^2 + 4x_1x_2 - 17x_2^2 + 5x_2$
- 2.3  $f(x) = 4x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_2^2 - 17x_1$

- 2.4  $f(x) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 + x_1 - 3x_2$   
 2.5  $f(x) = 10x_1^2 + 3x_1x_2 + x_2^2 + 10x_2$   
 2.6  $f(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 6x_2^2 + x_1 - x_2$   
 2.7  $f(x) = 7x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2 + x_1 - 10x_2$   
 2.8  $f(x) = 3x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 2x_1x_2 + x_1x_3 + x_1 - x_2 + x_3$   
 2.9  $f(x) = 7x_1^2 + 4x_2^2 + 6x_3^2 - 3x_1x_2 + x_1x_3$   
 2.10  $f(x) = 3x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3 + 7x_1 + x_3$

### Задания.

#### Тема: «Вариационные задачи с неподвижными концами»

1. Исследовать на непрерывность следующие функционалы:

- 1.1  $J[y(x)] = y(x_0)$ , где  $y(x) \in C[a, b]$  и  $x_0 \in [a, b]$  в смысле близости нулевого порядка.  
 1.2  $J[y(x)] = \max|y(x)|$ , где функции  $y(x) \in C[a, b]$  и  $x_0 \in [a, b]$  в смысле близости нулевого порядка.  
 1.3  $J[y(x)] = \int_0^1 |y'(x)| dx$ , где функции  $y(x)$  имеют непрерывные производные на отрезке  $[0; 1]$ :  
     а) в смысле близости нулевого порядка;  
     б) в смысле близости первого порядка.  
 1.4  $J[y(x)] = \int_0^\pi \sqrt{1 + Y'^2} dx$ , на функции  $y_0(x) = 0$ , где функции  $y(x) \in C_1[0; \pi]$ :  
     а) в смысле близости нулевого порядка;  
     б) в смысле близости первого порядка.  
 1.5  $J[y(x)] = \int_0^\pi (1 + 2y'^2(x)) dx$  на функции  $y_0(x) = 0$ , где функции  $y(x) \in C_1[0; \pi]$ ,  
 в смысле близости первого порядка.

2. Найти вариацию функционала в соответствующих пространствах в смысле первого и второго определения:

- 2.1  $J[y] = \int_a^b (x + y) dx$   
 2.2  $J[y] = \int_a^b (y^2 - 2y'^2) dx$   
 2.3  $J[y] = y^2(0) + \int_0^1 (xy + 2y'^2) dx$   
 2.4  $J[y] = \int_0^x y' \sin y dx$   
 2.5  $J[y] = \int_a^b F(x, y, y', \dots, y^{(m)}) dx$

3. Среди непрерывно дифференцируемых на отрезке  $[t_0, t_1]$  функций найти экстремали функционалов:

- 3.1  $\int_0^{t_1} \left( x + \frac{(1+t^2)}{2} x + t^2(x^2) \right) dt \rightarrow extr, 0 < t_0 < t_1$

$$3.2 \quad \int_0^1 (x + 2tx + (x^2)) dt \rightarrow extr, x(0) = x_0, x(1) = x_1$$

$$3.3 \quad \int_{t_0}^{t_1} (x^2 - 4x^2) dt \rightarrow extr$$

$$3.4 \quad \int_{t_0}^{t_1} (e^{2x} - 2x^2) dt \rightarrow extr$$

$$3.5 \quad \int_{t_0}^{t_1} \frac{1+x^2}{x} dt \rightarrow extr$$

$$3.6 \quad \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dt \rightarrow extr$$

$$3.7 \quad \int_{t_0}^{t_1} (x^2 - 2x \cos t - x^2) dt \rightarrow extr$$

$$3.8 \quad \int_{t_0}^{t_1} (t^2 (x^2 + 12x)) dt \rightarrow extr, 0 \leq t_2 < t_1$$

$$3.9 \quad \int_1^2 (x'^2 - 2xx') dt \rightarrow extr, x(1) = 1, x(2) = 0$$

$$3.10 \quad \int_0^1 xx'^2 dt \rightarrow extr, x(0) = 1, x(1) = \sqrt[3]{4}$$

4. Найти решение задач:

$$4.1 \quad \int_0^1 x''^2 dt \rightarrow extr, x(0) = x'(0) = x'(1) = 0, x(1) = 1$$

$$4.2 \quad \int_0^1 x''^2 dt \rightarrow extr, x(1) = x'(1) = x(0) = 0, x'(0) = 1$$

$$4.3 \quad \int_0^1 (x''^2 - 48x) dt \rightarrow extr, x(1) = x'(1) = 0, x(0) = 1, x'(0) = -4$$

$$4.4 \quad \int_0^1 (24tx - x''^2) dt \rightarrow extr, x(0) = x'(0) = x(1) = 0, x'(1) = 1/10$$

$$4.5 \quad \int_0^1 (48x - x''^2) dt \rightarrow extr, x(0) = x'(0) = 0, x(1) = 1, x'(1) = 4$$

$$4.6 \quad \int_0^\pi (x''^2 - x^2) dt \rightarrow extr, x(0) = 0, x'(0) = 1, x'(\pi) = ch\pi, x(\pi) = sh\pi$$

$$4.7 \quad \int_0^\pi (x''^2 - x^2) dt \rightarrow extr, x(0) = x'(0) = 0, x'(\pi) = sh\pi, x(\pi) = ch\pi + 1$$

$$4.8 \quad \int_0^1 (x''^2 + 4x^2) dt \rightarrow extr, x(0) = -1, x'(0) = 0, x'(\pi) = sh\pi, x(\pi) = ch\pi$$

$$4.9 \quad \int_0^1 (x''^2 + x^2) dt \rightarrow extr, x(0) = 1, x'(0) = 0, x'(1) = sh1, x(1) = ch1$$

$$4.10 \quad \int_0^1 (x''^2 + x^2) dt \rightarrow extr, x(0) = 1, x'(1) = ch1, x(1) = sh1$$

5. Найти допустимые экстремали:

$$\int_0^1 (x'^2 + y'^2 - 2xy) dt \rightarrow extr, x(0) = y(0) = 0, x(0) = y(0) = 0, x(1) = sh1, y(1) = -sh1$$

**Задания.**

**Тема: «Вариационные задачи с подвижными концами»**

1. Найти экстремали функционала  $\varphi(x) = \int_0^{t_1} \frac{\sqrt[4]{1+x^2}}{x} dx$ , если  $x(0) = 0$ , а точка  $(t_1, x_1)$  может перемещаться:

- 1.1 по прямой  $x = t - 5$
- 1.2 по окружности  $(t-9)^2 + x^2 = 9$
- 1.3 по эллипсу  $4x^2 + 9x^2 = 36$
- 1.4 по параболе  $x^2 = t$

2. Решить задачи с подвижными концами:

- 2.1  $\int_0^T x'^2 dt = \text{extr}, x(0) = 0, T + x(T) + 1 = 0$
- 2.2  $\int_0^T x'^2 dt = \text{extr}, x(0) = 0, (T-1)x^2(T) + 2 = 0$
- 2.3  $\int_0^T x'^2 dt = \text{extr}, x(0) = 0, T + x(T) = 1$
- 2.4  $\int_0^T (x'^2 + x) dt = \text{extr}, x(0) = 1$
- 2.5  $\int_0^T (x'^2 + x + 2) dt = \text{extr}, x(0) = 0$

3. Найти расстояние:

- 3.1 между параболой  $y = x^2$  и прямой  $x - y = 5$
- 3.2 от точки  $A(1;0)$  до эллипса  $4x^2 + 9y^2 = 36$
- 3.3 от точки  $A(-1;5)$  до заданной параболы  $y^2 = x$
- 3.4 от точки  $A(-1;3)$  до прямой  $y = 1 - 3x$

4. Выпишите условия трансверсальности для простейшей вариационной задачи. Докажите их справедливость.

5. Сформулируйте n-мерную простейшую вариационную задачу с подвижными концами. Сравните ее с простейшей n-мерной вариационной задачей с закрепленными концами.

6. Сформулируйте необходимые условия экстремума функционала для простейшей n-мерной вариационной задачи с подвижными концами.

7. Выпишите условия трансверсальности для простейшей вариационной задачи с подвижными концами. Докажите их справедливость.

### Задания.

#### Тема: «Принцип максимума Понтрягина»

1. С помощью принципа максимума решить задачу быстрогодействия для -----, где:

- 1.1  $S_0 = \{x_1 = x_2 = 0\}; S_1 \{ |x_1|^2 + |x_2|^2 - 4 = 0 \}$
- 1.2  $S_0 = \{x_1 = x_2 = 0\}; S_1 \{ |x_1|^2 + |x_2|^2 - 2 = 0 \}$

- 1.3  $S_0 = \{x_1 = 1, x_2 = 0\}; S_1 \{ |x_1|^2 - |x_2|^2 - 4 = 0 \}$   
 1.4  $S_0 = \{x_1 = 0\}; S_1 \{ |x_1|^2 - |x_2|^2 - 1 = 0 \}$   
 1.5  $S_0 = \{x_2 = 1\}; S_1 \{ |x_1|^2 + |x_2|^2 + 1 = 0 \}$   
 1.6  $S_0 = \{x_1 = x_2 = 1\}; S_1 \{ |x_1|^2 - 2|x_2|^2 - 1 = 0 \}$   
 1.7  $S_0 = \{x_1 = 0, x_2 = 2\}; S_1 \{ 2|x_1|^2 - |x_2|^2 = 0 \}$   
 1.8  $S_0 = \{x_1 = 0, x_2 = 1\}; S_1 \{ |x_1|^2 - 3|x_2|^2 = 4 \}$   
 1.9  $S_0 = \{x_1 = 1, x_2 = 0\}; S_1 \{ 5|x_1|^2 - 2|x_2|^2 = 0 \}$   
 1.10  $S_0 = \{x_1 = x_2 = 0\}; S_1 \{ |x_1|^2 - |x_2|^2 = 0 \}$

2.С использованием принципа максимума найти допустимые экстремали в следующих задачах оптимального управления:

- 2.1  $T \rightarrow \inf, |x|'' \leq 2, x'(0) = x'(T) = 0, x(0) = 1, x(T) = 3$   
 2.2  $T \rightarrow \inf, -3 \leq x'' \leq 2, x'(0) = x'(T) = 0, x(0) = 3, x(T) = -5$   
 2.3  $T \rightarrow \inf, -1 \leq x'' \leq 3, x'(0) = x'(T) = 0, x(0) = 1, x(T) = 1$   
 2.4  $T \rightarrow \inf, |x|'' \leq 2, x'(-1) = x'(T) = 0, x(-1) = 1, x(T) = -1$   
 2.5  $T \rightarrow \inf, |x|'' \leq 2, x'(-1) = x'(T) = 0, x(-1) = -1, x(T) = 1$   
 2.6  $T \rightarrow \inf, |x|'' \leq 1, x(0) = \xi_1, x'(0) = \xi_2, x'(T) = x(T) = 0$   
 2.7  $T \rightarrow \inf, |x|'' \leq 1, x(0) = \xi_1, x'(0) = \xi_2, x(T) = 0$   
 2.8  $T \rightarrow \inf, |x|'' \leq 1, x(0) = \xi_1, x'(0) = \xi_2, x'(T) = x(T) = 0$   
 2.9  $T \rightarrow \inf, 0 \leq x'' \leq 1, x(0) = \xi_1, x'(0) = \xi_2, x'(T) = x(T) = 0$   
 2.10  $T \rightarrow \inf, \int_0^T x'' dt, x'(0) = 0, x'(T) = 1, x(0) = 0$

3.Решить задачи, используя принцип максимума:

- 3.1  $\int_{-\pi}^{\pi} \sin t dt \rightarrow extr, |x'| \leq 1, x(\pm \pi) = 0$   
 3.2  $\int_0^{7\pi/4} x \sin t dt \rightarrow extr, |x'| \leq 1, x(0) = 0$   
 3.3  $\int_{-\pi}^{\pi} |x'| dt \rightarrow \inf, x' \geq A, x(0) = 0, x(T_0) = \xi, (A < 0)$   
 3.4  $\int_0^4 (x'^2 + x) dt \rightarrow extr, |x'| \leq 1, x(4) = 0$   
 3.5  $\int_0^{T_0} (x'^2 + x) dt \rightarrow extr, |x'| \leq 1, x(0) = 0$   
 3.6  $\int_0^{T_0} (x'^2 + x) dt \rightarrow extr, |x'| \leq 1, x(0) = \xi$   
 3.7  $\int_0^{T_0} (x'^2 + x) dt \rightarrow extr, |x'| \leq 1, x(T_0) = \xi$   
 3.8  $\int_0^{T_0} (x'^2 + x) dt \rightarrow extr, |x'| \leq 1, x(0) = 0, x(T_0) = 0$



$$3.9 \int_0^{T_0} (x'^2 + x^2) dt \rightarrow \text{extr}, |x'| \leq 1, x(0) = \xi$$

$$3.10 \int_0^{T_0} x t dt \rightarrow \text{extr}, |x''| \leq 2, x(0) = x''(0) = 0$$

#### **Методические рекомендации по решению задач.**

Приступая к решению задач, необходимо внимательно изучить теоретический материал по темам, разобрать приводимые в теоретическом материале примеры. При выполнении заданий используются формулы и методы, представленные по каждой теме.

Цель заданий – научить излагать основы аналитических методов определения решения экстремальных задач и классического вариационного исчисления, а также эффективных вычислительных способов получения приближенного решения

#### **Критерии формирования оценок (оценивания) по заданиям для самостоятельной работы студента (типовые задачи).**

Самостоятельное выполнение заданий на практических занятиях, а также вне аудитории является одним из основных способов учёта знаний обучающегося по дисциплине «Вариационное исчисление и методы оптимизации».

В результате *самостоятельной работы* знания обучающегося оцениваются по ниже следующей шкале.

**Таблица 7. Шкала оценивания**

<b>Количество баллов</b>	<b>Критерии оценивания</b>
5	Обучающийся - показал глубокие знания материала по поставленным вопросам, грамотно, логично его излагает, свободно использует необходимые формулы при решении задач; - знает все формулы, применяемые методы и их точность; - может применять знания при решении прикладных задач для самостоятельного выполнения.
4	Обучающийся - даёт ответ, удовлетворяющий требованиям; - твердо знает материал, грамотно его излагает, не допускает существенных неточностей в процессе решения задач; - сам исправляет свои несущественные ошибки и некоторые недочёты.
3	Обучающийся обнаруживает знание и понимание основного материала по поставленным вопросам, но не усвоил все его детали, допускает отдельные неточности при решении задач.
2	Обучающийся обнаруживает неполное знание и понимание основного материала по поставленным вопросам, не усвоил его деталей, допускает неточности при решении задач.
1	Обучающийся обнаруживает значительное незнание и понимание основного материала по поставленным вопросам, не усвоил его деталей, допускает существенные неточности при решении задач.
0	Обучающийся допускает грубые ошибки в ответе на поставленные вопросы и при решении задач.

Баллы могут ставиться не только за единовременный ответ, но и за рассредоточенный во времени, т.е. за сумму ответов, данных студентом на протяжении занятия.

## 5.2. Оценочные материалы для рубежного контроля.

*Рубежный контроль* проводится с целью определения качества освоения учебного материала в целом. Рубежный контроль осуществляется по более или менее самостоятельным разделам курса и проводится по окончании изучения материала в заранее установленное время.

В течение семестра проводится *три рубежных контрольных мероприятия по графику*.

Рубежный контроль проводится в виде коллоквиумов (или самостоятельных, контрольных) на практических занятиях, а также компьютерного тестирования.

Выполняемые работы хранятся на кафедре в течение учебного года и по требованию предоставляются в Управление контроля качества. На рубежные контрольные мероприятия выносятся программный материал (разделы) по дисциплине.

По каждой контрольной точке обязательным является компьютерное тестирование, которое проводится в группе вне рамок учебного расписания. Разработана и сертифицирована в установленном порядке база тестовых заданий по дисциплине. Она ежегодно обновляется и (или) дополняется на 15%.

Проведение бально-рейтинговых контрольных мероприятий для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья по дисциплине обеспечивается адаптированными контрольно-измерительными материалами и соответствующей технологией аттестации.

### 5.2.1. Оценочные материалы для контрольной работы (коллоквиумов) (контролируемая компетенция ПКС-3)

#### Образцы заданий для проведения контрольных работ

##### Вариант 1

1. Определите расстояние между кривыми  $y = x$  и  $y = x^2$  на отрезке  $[0, 1]$ .
2. Найти уравнение Эйлера для функционала  $V[y(x)] = \int (y'^2 - 2xy)dx$ .
3. Чему равна функция Лагранжа для функции  $z = x^2y$  при условии  $y = x + 2$ .
4. Укажите порядок близости кривых  $y(x) = \frac{\sin nx}{n^2}$  и  $y_1(x) \equiv 0$  на  $[0, \pi]$  (при  $n$  – достаточно большим).

##### Вариант 2

1. Определите расстояние между кривыми  $f(x) = xe^{-x}$  и  $f_1(x) \equiv 0$  на отрезке  $[0, 2]$ .
2. Найти уравнение Эйлера для функционала  $V[y(x)] = \int y(3x - y) y dx$ .
3. Чему равна функция Лагранжа для функции  $z = x^2 y^2$  при условии  $y = x + 2$ .
4. Укажите порядок близости кривых  $y(x) = \frac{\cos nx}{n^2 + 1}$  и  $y_1(x) \equiv 0$  на  $[0, 2\pi]$  (при  $n$  – достаточно большим).

##### Вариант 3

1. Определите расстояние между кривыми  $f(x) = \sin 2x$  и  $f_1(x) = \sin x$  на отрезке  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .
2. Найти уравнение Эйлера для функционала  $V[y(x)] = \int (y'^2 - y^2) dx$ .
3. Чему равна функция Лагранжа для функции  $z = x^2 y$  при условии  $y = x + 1$ .

4. Укажите порядок близости кривых  $y(x) = \frac{\sin x}{n}$  и  $y_1(x) \equiv 0$  на  $[0,1]$  (при  $n$  – достаточно большим).

Оценочные материалы для **коллоквиумов** приведены в п. 5.1.1.

**Критерии формирования оценок (оценивания) по контрольным точкам (контрольные работы, коллоквиум).**

В результате контрольной точки (контрольные работы, коллоквиум) знания обучающегося оцениваются по ниже следующей шкале.

**Таблица 8. Шкала оценивания**

Количество баллов	Критерии оценивания
5	Обучающийся - выполнил работу полностью без ошибок и недочетов; - демонстрирует знание теоретического и практического материала по теме практической работы, решено 71–100% задач.
4	Обучающийся - выполнил работу полностью, допущено в ней не более одной негрубой ошибки и недочета (не более трех недочетов); - демонстрирует знание теоретического и практического материала по теме практической работы, допуская незначительные неточности при решении задач, решено 56–70% задач.
3	Обучающийся - правильно выполнил не менее 2/3 всей работы или допустил не более одной грубой ошибки и двух недочетов, не более одной грубой и одной негрубой ошибки, не более трех негрубых ошибок, одной негрубой; - затрудняется с правильным ответом предложенной задачи; - дает неполный ответ, решено 50–55% задач.
0–2	Обучающийся - допустил ошибки и недочеты, превышающие требования для 3 баллов или правильно выполнил менее 2/3 всей работы; - решено менее 50 % задач.

**5.2.2. Оценочные материалы для компьютерного тестирования (контролируемая компетенция ПКС-3)**

Полный перечень тестовых заданий представлен в ЭОИС – <http://open.kbsu.ru/moodle/course/view.php?id=2615>

*Тест* – система стандартизированных заданий, позволяющая автоматизировать процедуру измерения уровня знаний и умений студента.

**Образцы тестовых заданий**

1) Разделы математики, на которых базируется исследование операций:

-: Теория алгоритмов

+: Теория вероятностей

+: Теория игр

-: Дискретная математика

2) Входят в классификацию задач исследования операций по виду критерия оптимальности, задачи

+: математического программирования

+: принятия решений в условиях риска

-: многокритериальной оптимизации

-: динамического программирования

-: целочисленного программирования

**Критерии формирования оценок (оценивания) по компьютерному тестированию.**

В результате компьютерного тестирования знания обучающегося оцениваются по ниже следующей шкале.

**Таблица 9. Шкала оценивания**

Процент правильных ответов, критерии оценивания	Количество баллов
Более 85 % правильных ответов на предложенные тестовые задания.	5
От 71 до 84 % правильных ответов на предложенные тестовые задания.	4
От 41 до 70 % правильных ответов на предложенные тестовые задания.	3
От 21 до 40 % правильных ответов на предложенные тестовые задания.	2
От 10 до 20 % правильных ответов на предложенные тестовые задания.	1
Менее 10 % правильных ответов на предложенные тестовые задания.	0

В результате прохождения *текущего и рубежного контроля* знания обучающегося оцениваются по ниже следующей шкале.

**Таблица 10. Шкала оценивания**

Семестр	Шкала оценивания			
	0-35 баллов	36-50 баллов	51-60 баллов	56-70 баллов
VII	Частичное посещение аудиторных занятий. Неудовлетворительное выполнение практических работ. Плохая подготовка к балльно-рейтинговым мероприятиям. Студент не допускается к промежуточной	Полное или частичное посещение аудиторных занятий. Частичное выполнение и защита практических работ. Выполнение контрольных работ, тестовых заданий, ответы на коллоквиуме на	Полное или частичное посещение аудиторных занятий. Полное выполнение и защита практических работ. Выполнение	Полное посещение аудиторных занятий. Полное выполнение и защита практических занятий. Выполнение контрольных

	аттестации/	оценки «удовлетворительно».	контрольных работ, тестовых заданий, ответы на коллоквиуме на оценки «хорошо».	работ, тестовых заданий, ответы на коллоквиуме на оценки «отлично».
--	-------------	--------------------------------	---	---

### 5.3 Оценочные материалы для промежуточной аттестации.

*Целью промежуточных аттестаций* по дисциплине является оценка качества освоения дисциплины обучающимися.

Промежуточная аттестация предназначена для объективного подтверждения и оценивания достигнутых результатов обучения после завершения изучения дисциплины. Осуществляется в конце семестра и представляет собой итоговую оценку знаний по дисциплине «Вариационное исчисление и методы оптимизации». в виде проведения экзамена.

Промежуточная аттестация может проводиться в устной, письменной форме, и в форме тестирования. На промежуточную аттестацию отводится до 30 баллов.

#### **Вопросы к экзамену (контролируемая компетенция ПКС-3)**

1. Задача о брахистохроне.
2. Связь между принципом максимума и классическим вариационным исчислением.
3. Свойства выпуклых функций на выпуклых множествах.
4. Задача оптимального управления с подвижными концами.
5. Основная задача линейного программирования.
6. Принцип максимума Понтрягина для задач с закрепленными концами.
7. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования.
8. Общая формулировка задачи оптимального управления.
9. Теорема Куна -Таккера. Двойственная задача.
10. Принцип максимума Понтрягина в задачах оптимального управления.
11. Необходимое и достаточное условие оптимальности в случае дифференцируемых функций.
12. Вариационные задачи с подвижными границами.
13. Симплексный метод. Определение опорного и оптимального планов.
14. Условный экстремум функционала.
15. Метод искусственного базиса.
16. Достаточные условия экстремума функционала.
17. Модифицированный симплексный метод.
18. Поле экстремалей.
19. Транспортная задача.
20. Уравнение Эйлера.
21. Нахождение опорного плана методом северо-западного угла и методом минимального элемента.
22. Вариация функционала и ее свойства.
23. Экономическая и геометрическая интерпретация задач нелинейного программирования.
24. Условия экстремума в задачах нелинейного программирования.
25. Метод множителей Лагранжа.
26. Выпуклые функции и опорные функционалы.

27. Методы минимизации функций одной переменной.
28. Выпуклые множества и конусы.
29. Поиск отрезка, содержащего точку минимума.
30. Методы оптимизации при наличии ограничений.
31. Метод Фибоначчи.
32. Метод Ньютона и модифицированный метод Ньютона.
33. Метод золотого сечения.
34. Методы безусловной минимизации, использующие вторые производные функции.
35. Многоэкстремальные задачи.
36. Метод сопряженных направлений.
37. Методы минимизации функций многих переменных.
38. Задача о геодезических линиях.
39. Изопериметрическая задача.
40. Метод градиентного спуска.
41. Метод наискорейшего спуска.
42. Теорема отделимости
43. Уравнение Эйлера – Пуассона.
44. Метод ломанных и касательных.
45. Принцип максимума Понтрягина.
46. Численные методы минимизации функций одной переменной.
47. Нахождение экстремалей функционалов.
48. Методы приближенного решения задач оптимального управления.
49. Целочисленные задачи линейного программирования.
50. Градиентные методы решения задач нелинейного программирования.
51. Метод Гомори.
52. Метод штрафных и барьерных функций.
53. Методы минимизации функций одной переменной.
54. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования.
55. Свойства выпуклых функций на выпуклых множествах.
56. Вариационные задачи с подвижными концами.
57. Свойства выпуклых функций на выпуклых множествах.
58. Вариационные задачи с подвижными концами.
59. Метод сопряженных направлений и метод Ньютона.
60. Транспортная задача.

### ***Оценочные материалы для промежуточной аттестации.***

#### ***Критерии формирования оценок по промежуточной аттестации:***

**«отлично» (26-30 баллов)** – получают обучающиеся, которые свободно ориентируются в материале и отвечают без затруднений. Обучающийся способен к выполнению сложных заданий, постановке целей и выборе путей их реализации. Работа выполнена полностью без ошибок, решено 100% задач;

**«хорошо» (21-25 баллов)** – получают обучающиеся, которые относительно полно ориентируются в материале, отвечают без затруднений, допускают незначительное количество ошибок. Обучающийся способен к выполнению сложных заданий. Работа выполнена полностью, но имеются не более одной негрубой ошибки и одного недочета, не более трех недочетов. Допускаются незначительные неточности при решении задач, решено 70% задач;

**«удовлетворительно» (11-20 баллов)** – получают обучающиеся, у которых недостаточно высок уровень владения материалом. В процессе ответа на экзамене

допускаются ошибки и затруднения при изложении материала. Обучающийся правильно выполнил не менее 2/3 всей работы или допустил не более одной грубой ошибки и двух недочетов, не более одной грубой и одной негрубой ошибки, не более трех ной задачи, дает неполный ответ, решено 55% задач; негрубых ошибок, одной негрубой. Обучающийся затрудняется с правильной оценкой предложен

**«неудовлетворительно»** (менее **10 баллов**) – получают обучающиеся, которые допускают значительные ошибки. Обучающийся имеет лишь начальную степень ориентации в материале. В работе число ошибок и недочетов превысило норму для оценки 3 или правильно выполнено менее 2/3 всей работы. Обучающийся дает неверную оценку ситуации, решено менее 50% задач.

#### **6. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

**Таблица 11. Распределение баллов текущего и рубежного контроля**

№ п/п	Вид контроля	Сумма баллов			
		Общая сумма	1-я точка	2-я точка	3-я точка
<b>1</b>	<b>Посещение занятий</b>	<b>до 10 баллов</b>	<b>до 3 б.</b>	<b>до 3 б.</b>	<b>до 4 б.</b>
<b>2</b>	<b>Текущий контроль:</b>	<b>до 30 баллов</b>	<b>до 10 б.</b>	<b>до 10 б.</b>	<b>до 10 б.</b>
	<b>Ответ на 5 вопросов</b>	<b>от 0 до 15 б.</b>	<b>от 0 до 5 б.</b>	<b>От 0 до 5 б.</b>	<b>От 0 до 5 б.</b>
	Полный правильный ответ	до 15 баллов	5 б.	5 б.	5 б.
	Неполный правильный ответ	от 6 до 12 б.	от 2 до 4 б.	от 2 до 4 б.	от 2 до 4 б.
	Ответ, содержащий значительные неточности, ошибки	от 0 до 3 б.	от 0 до 1 б.	от 0 до 1 б.	от 0 до 1 б.
	<b>Выполнение самостоятельных заданий (решение задач, написание рефератов, доклад)</b>	<b>от 0 до 15 б.</b>	<b>от 0 до 5 б.</b>	<b>от 0 до 5 б.</b>	<b>от 0 до 5 б.</b>
<b>3</b>	<b>Рубежный контроль</b>	<b>до 30 баллов</b>	<b>до 10 б.</b>	<b>до 10 б.</b>	<b>до 10 б.</b>
	тестирование	от 0 до 15 б.	от 0 до 5 б.	от 0 до 5 б.	от 0 до 5 б.
	коллоквиум	от 0 до 15 б.	от 0 до 5 б.	от 0 до 5 б.	от 0 до 5 б.
<b>Итого сумма текущего и рубежного контроля</b>		<b>до 70 баллов</b>	<b>до 23 б.</b>	<b>до 23 б.</b>	<b>до 24 б.</b>
<b>Экзамен</b>					
	<b>Первый этап (базовый уровень) – оценка «удовлетворительно»</b>	не менее 36 б.	не менее 12 б.	не менее 12 б.	не менее 12 б.
	<b>Второй этап (продвинутый уровень) – оценка «хорошо»</b>	менее 70 б. (51-69 б.)	менее 23 б.	менее 23 б.	менее 24 б.

	<b>Третий этап (высокий уровень) – оценка «отлично»</b>	не менее 70 б.	не менее 23 б.	не менее 23 б	не менее 24 б.
--	---	----------------	----------------	---------------	----------------

**Целью промежуточных аттестаций** по дисциплине является оценка качества освоения дисциплины обучающимися.

По дисциплине «Вариационное исчисление и методы оптимизации».

Максимальная сумма (100 баллов), набираемая студентом по дисциплине включает две составляющие:

– *первая составляющая* – оценка регулярности, своевременности и качества выполнения студентом учебной работы по изучению дисциплины в течение периода изучения дисциплины (семестра, или нескольких семестров) (сумма – не более 70 баллов). Баллы, характеризующие успеваемость студента по дисциплине, набираются им в течение всего периода обучения за изучение отдельных тем и выполнение отдельных видов работ.

– *вторая составляющая* – оценка знаний студента по результатам промежуточной аттестации (не более 30 –баллов).

Критерием оценки уровня сформированности компетенций в рамках учебной дисциплины «Вариационное исчисление и методы оптимизации».

в VII семестре является экзамен.

#### **Критерии оценки качества освоения дисциплины**

**Оценка «отлично»– от 91 до 100** Общий балл текущего и рубежного контроля складывается из следующих составляющих приложение 2. В течение учебного процесса студент обязан отчитаться по теоретическому материалу и практическим занятиям: опросы, индивидуальные задания. (по желанию автора при необходимости)

**Целью промежуточных аттестаций** по дисциплине является оценка качества освоения дисциплины обучающимися **баллов** –с освоенным материалом сформированы. Все предусмотренные программой теоретическое содержание курса освоено полностью, без пробелов, необходимые практические навыки работы обучения учебные задания выполнены, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к максимальному. На экзамене студент демонстрирует глубокие знания предусмотренного программой материала, умеет четко, лаконично и логически последовательно отвечать на поставленные вопросы.

**Оценка «хорошо» – от 81 до 90 баллов** – теоретическое содержание курса освоено, необходимые практические навыки работы сформированы, выполненные учебные задания содержат незначительные ошибки. На экзамене студент демонстрирует твердые знания основного (программного) материала, умеет четко, грамотно, без существенных неточностей отвечать на поставленные вопросы.

**Оценка «удовлетворительно» – от 66 до 80 баллов** – теоретическое содержание курса освоено не полностью, необходимые практические навыки работы сформированы частично, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. На экзамене студент демонстрирует знание только основного материала, ответы содержат неточности, слабо аргументированы, нарушена последовательность изложения материала

**Оценка «неудовлетворительно» – от 36 до 65 баллов** – теоретическое содержание курса не освоено, необходимые практические навыки работы не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки, дополнительная самостоятельная работа над материалом курса не приведет к существенному повышению качества выполнения учебных заданий. На экзамене студент демонстрирует незнание значительной части программного материала, существенные ошибки в ответах на вопросы, неумение ориентироваться в материале, незнание основных понятий дисциплины.



**Таблица 7. Результаты освоения учебной дисциплины, подлежащие проверке**

<b>Код и наименование компетенции</b>	<b>Основные показатели оценки результатов обучения</b>	<b>Индикаторы достижения компетенции</b>	<b>Вид оценочного материала, обеспечивающие формирование компетенций</b>
<b>ПКС-3.</b> Способен публично представлять собственные и известные научные результаты	<p><b>Знать:</b> принципы использования информационных технологий при решении задач в профессиональной деятельности, науке и образовании;</p> <p>профессиональную терминологию, способы воздействия на аудиторию.</p> <p><b>Уметь:</b> обосновать актуальность, новизну, теоретическую и практическую значимость собственного исследования, определять методологию научного исследования, делать выводы из проведенного исследования и определять перспективы дальнейшей работы.</p> <p><b>Владеть:</b> навыками планирования, осуществления и презентации результатов индивидуального научного исследования;</p> <p>профессиональной терминологией при презентации проведенного исследования; основными приемами ораторского искусства, научным стилем изложения собственной концепции.</p>	<p><b>ПКС-3.1.</b> Способен публично представлять результаты собственных исследований.</p> <p><b>ПКС-3.2.</b> Способен изучить новейшие результаты исследований и применить их в профессиональной деятельности</p>	<p>Типовые оценочные материалы для устного опроса (п. 5.1.1); типовые оценочные материалы для контрольной работы (п. 5.2.1); типовые тестовые задания (п. 5.2.2); типовые оценочные материалы к экзамену (п. 5.3).</p>

Таким образом, выполнение типовых заданий, представленных в разделе 5 «Оценочные материалы для текущего и рубежного контроля успеваемости и промежуточной аттестации» позволит обеспечить:

- способность публично представлять собственные и известные научные результаты (ПКС-3).

## **7. Учебно-методическое обеспечение дисциплины**

### **7.1. Нормативно-законодательные акты**

1. Федеральный государственный образовательный стандарт высшего образования - бакалавриат по направлению подготовки 01.03.01-Математика, утвержденный приказом Министерства образования и науки Российской

Федерации от «10» января 2018г. № 8 (зарегистрировано в Минюсте России «06» февраля 2018г. №49941).  
[https://fgosvo.ru/uploadfiles/FGOS%20VO%203++/Bak/010301\\_B\\_3\\_15062021.pdf](https://fgosvo.ru/uploadfiles/FGOS%20VO%203++/Bak/010301_B_3_15062021.pdf)

2. Федеральный закон «Об образовании в Российской Федерации» от 29.12.2012 N 273-ФЗ [http://www.consultant.ru/document/cons\\_doc\\_LAW\\_140174/](http://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_140174/)

## **7.2. Основная литература**

1. Бренерман М.Х. Вариационное исчисление: учебное пособие / Бренерман М.Х., Жихарев В.А.. — Казань: Казанский национальный исследовательский технологический университет, 2017. — 148 с. <https://www.iprbookshop.ru/79275.html>
2. Ванько В.И. Вариационное исчисление и оптимальное управление. Вып.15: учебник для вузов / Ванько В.И., Ермошина О.В., Кувыркин Г.Н.. — Москва: Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, 2018. — 488 с. <https://www.iprbookshop.ru/104539.html>
3. Моклячук М.П. Вариационное исчисление. Экстремальные задачи: учебник / Моклячук М.П.. — Москва, Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, Институт компьютерных исследований, 2019. — 428 с. <https://www.iprbookshop.ru/91913.html>
4. Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению / В.К. Романко [и др.]... — Москва: Лаборатория знаний, 2020. — 220 с. <https://www.iprbookshop.ru/88985.html>

## **7.3. Дополнительная литература**

1. Аттетков А. В., Зарубин В. С., Канатникова А. Н. Методы оптимизации. — М.: РИОР:ИНФРА-М, 2013. — 270 с. (6 экз.)
2. Банди Б. Методы оптимизации: Вводный курс / Банди Б.; Волынского В.А. - Москва : Радио и связь, 1988. - 127с. (12 экз.)
3. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Методы оптимизации. — Минск: БГУ им. В.И. Ленина, 1981. — 350 с. (12 экз.)
4. Розова В.Н. Методы оптимизации [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Розова В.Н., Максимова И.С.— Электрон. текстовые данные.— М.: Российский университет дружбы народов, 2010.— 112 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/11536.html>.— ЭБС «IPRbooks»
5. Тракимус Ю.В. Основы вариационного исчисления в примерах и задачах [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Тракимус Ю.В.— Электрон. текстовые данные. — Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2011.— 72 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/45416.html>.— ЭБС «IPRbooks»
6. Цлаф Л.Я. Вариационное исчисление и интегральные уравнения. — СПб: Лань, 2005. — 192 с. (14 экз.)

## **7.4. Периодические издания**

1. Вестник МГУ Серия 1. Математика. Механика.
2. Доклады РАН
3. Журнал вычислительной математики и математической физики
4. Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки
5. Успехи математических наук

## 7.5. Интернет-ресурсы

1. Библиотека КБГУ <http://lib.kbsu.ru>
2. Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU <http://www.elibrary.ru>
3. Электронно-библиотечная система «IPR BOOKS» <http://www.iprbookshop.ru/>
4. Электронно-библиотечная система «Юрайт» <https://www.biblio-online.ru/>
5. Электронно-библиотечная система «Консультант студента» <http://www.studentlibrary.ru/>

№п/п	Наименование электронного ресурса	Краткая характеристика	Адрес сайта	Наименование организации-владельца; реквизиты договора	Условия доступа
1.	<b>Научная электронная библиотека (НЭБ РФФИ)</b>	Электр. библиотека научных публикаций - около 4000 иностранных и 3900 отечественных научных журналов, рефераты публикаций 20 тыс. журналов, а также описания 1,5 млн. зарубежных и российских диссертаций; 2800 росс. журналов на безвозмездной основе	<a href="http://elibrary.ru">http://elibrary.ru</a>	ООО «НЭБ»	Полный доступ
2.	<b>База данных Science Index (РИНЦ)</b>	Национальная информационно-аналитическая система, аккумулирующая более 6 миллионов публикаций российских авторов, а также информацию об их цитировании из более 4500 российских журналов.	<a href="http://elibrary.ru">http://elibrary.ru</a>	ООО «НЭБ» Лицензионный договор Science Index №SIO-741/2022 от 19.07.2022 г. Активен до 31.07.2023г.	Авторизованный доступ. Позволяет дополнять и уточнять сведения о публикациях ученых КБГУ, имеющих в РИНЦ
3.	<b>ЭБС «Консультант студента»</b>	13800 изданий по всем областям знаний,	<a href="http://www.studmedlib.ru">http://www.studmedlib.ru</a> <a href="http://www.medcollegelibrary.ru">http://www.medcollegelibrary.ru</a>	ООО «Политехресурс» (г. Москва)	Полный доступ (регистрация по IP-адресам)

		включает более чем 12000 учебников и учебных пособий для ВО и СПО, 864 наименований журналов и 917 монографий.		Договор №310СЛ/08-2021 От 30.09.2021 г. Активен до 30.09.2022г.	КБГУ)
4.	<b>«Электронная библиотека технического вуза» (ЭБС «Консультант студента»)</b>	Коллекция «Медицина (ВО) ГЭОТАР-Медиа. Books in English (книги на английском языке)»	<a href="http://www.studmedlib.ru">http://www.studmedlib.ru</a>	ООО «Политехресурс» (г. Москва) Договор №701КС/02-2022 от 13.04.2022 г. Активен до 19.04.2022г.	Полный доступ (регистрация по IP-адресам КБГУ)
5.	<b>ЭБС «Лань»</b>	Электронные версии книг ведущих издательств учебной и научной литературы (в том числе университетских издательств), так и электронные версии периодических изданий по различным областям знаний.	<a href="https://e.lanbook.com/">https://e.lanbook.com/</a>	ООО «ЭБС ЛАНЬ» (г. Санкт-Петербург) Договор №6ЕП/223 от 15.02.2022 г. Активен до 28.02.2023г.	Полный доступ (регистрация по IP-адресам КБГУ)
6.	<b>Национальная электронная библиотека РГБ</b>	Объединенный электронный каталог фондов российских библиотек, содержащий 4 331 542 электронных документов образовательного и научного характера по различным отраслям знаний	<a href="https://нэб.рф">https://нэб.рф</a>	ФГБУ «Российская государственная библиотека» Договор №101/НЭБ/16 66-п от 10.09.2020г. Сроком на 5 лет	Доступ с электронного читального зала библиотеки КБГУ
7.	<b>ЭБС «IPRbooks»</b>	107831 публикаций, в т.ч.: 19071 –	<a href="http://iprbookshop.ru/">http://iprbookshop.ru/</a>	ООО «Ай Пи Эр Медиа» (г. Саратов)	Полный доступ (регистрация

		учебных изданий, 6746 – научных изданий, 700 коллекций, 343 журнала ВАК, 2085 аудиоизданий.		Договор №9200/22П от 08.04.2022 г. Активен до 02.04.2023г.	по IP-адресам КБГУ)
8.	ЭБС «Юрайт» для СПО	Электронные версии учебной и научной литературы издательств «Юрайт» для СПО и электронные версии периодических изданий по различным областям знаний.	<a href="https://www.biblio-online.ru/">https://www.biblio-online.ru/</a>	ООО «Электронное издательство ЮРАЙТ» (г. Москва) Договор №192/ЕП-223 От 29.10.2021 г. Активен до 31.10.2022 г.	Полный доступ (регистрация по IP-адресам КБГУ)
9.	Polpred.com. Новости. Обзор СМИ. Россия и зарубежье	Обзор СМИ России и зарубежья. Полные тексты + аналитика из 600 изданий по 53 отраслям	<a href="http://polpred.com">http://polpred.com</a>	ООО «Полпред справочники» Безвозмездно (без официального договора)	Доступ по IP-адресам КБГУ
10.	Президентская библиотека им. Б.Н. Ельцина	Более 500 000 электронных документов по истории Отечества, российской государственности, русскому языку и праву	<a href="http://www.prilib.ru">http://www.prilib.ru</a>	ФГБУ «Президентская библиотека им. Б.Н. Ельцина» (г. Санкт-Петербург) Соглашение от 15.11.2016г. бессрочный	Авторизованный доступ из библиотеки (ауд. №115,214)

## 7.6. Методические указания к практическим работам

Целью практических занятий является приобретение студентами новых знаний, профессиональных умений и навыков для самостоятельной практической работы. Практические занятия позволяют углубить и закрепить теоретические знания в интересах профессиональной подготовки. Они позволяют продемонстрировать знания, самостоятельность, умение читать и понимать учебные и научные материалы, а также применять их при решении конкретных задач прикладной математики.

Практические (семинарские) занятия – составная часть учебного процесса, групповая форма занятий при активном участии студентов. Практические занятия способствуют углубленному изучению наиболее сложных проблем науки и служат основной формой подведения итогов самостоятельной работы обучающихся. Целью практических занятий является углубление и закрепление теоретических знаний, полученных обучающимися на лекциях и в процессе самостоятельного изучения учебного материала, а, следовательно, формирование у них определенных умений и навыков.

В ходе подготовки к семинарскому занятию необходимо прочитать конспект

лекции, изучить основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой, выполнить выданные преподавателем практические задания. При этом учесть рекомендации преподавателя и требования программы. Дорабатывать свой конспект лекции, делая в нем соответствующие записи из литературы.

Желательно при подготовке к практическим занятиям по дисциплине одновременно использовать несколько источников, раскрывающих заданные вопросы.

На практических занятиях обучающиеся учатся грамотно излагать проблемы, свободно высказывать свои мысли и суждения, рассматривают ситуации, способствующие развитию профессиональной компетентности. Следует иметь в виду, что подготовка к практическому занятию зависит от формы, места проведения семинара, конкретных заданий и поручений. Это может быть написание доклада, реферата (с последующим их обсуждением), коллоквиум.

Для подготовки к практическим и лабораторным занятиям следует использовать рекомендованную литературу и источники. Есть доступ к электронному варианту конспекта лекций, а также имеется лабораторный практикум: Кармоков М.М., Буздов Б.К., Кудаева Ф.Х., . Методы оптимизации. Изд. КБГУ. Нальчик, 2010. 129 с.

#### **7.7. Методические указания по проведению различных учебных занятий, к курсовому проектированию и другим видам самостоятельной работы**

Учебная работа по дисциплине «Вариационное исчисление и методы оптимизации» состоит из контактной работы (лекции, практические занятия) и самостоятельной работы. Доля контактной учебной работы в общем объеме времени, отведенном для изучения дисциплины, составляет 35,4 % (в том числе лекционных занятий – 33,3%, практических занятий – 66,7%), доля самостоятельной работы – 45,8 %. Соотношение лекционных и практических занятий к общему количеству часов соответствует учебному плану направления 01.03.02 – Прикладная математика и информатика

Для подготовки к практическим занятиям необходимо рассмотреть контрольные вопросы, при необходимости обратиться к рекомендуемой литературе, записать непонятные моменты в вопросах для уяснения их на предстоящем занятии.

##### ***Методические рекомендации по изучению дисциплины «Вариационное исчисление и методы оптимизации»***

Цель курса «Вариационное исчисление и методы оптимизации» - усвоение основ теории о нахождении экстремумов функции или функционалов, заданных на определенных множествах в объеме необходимом для успешного освоения методологических и прикладных вопросов; развитие способности самостоятельного использования полученных теоретических знаний для решения задач, возникающих в практической деятельности, умение составлять алгоритмы их реализации на ЭВМ.

Приступая к изучению дисциплины, обучающемуся необходимо ознакомиться с тематическим планом занятий, списком рекомендованной учебной литературы. Следует уяснить последовательность выполнения индивидуальных учебных заданий, занести в свою рабочую тетрадь темы и сроки проведения семинаров, написания учебных работ. При изучении дисциплины, обучающиеся выполняют следующие задания: изучают рекомендованную учебную и научную литературу; пишут контрольные работы, готовят доклады и сообщения к практическим занятиям; выполняют самостоятельные работы, участвуют в выполнении практических заданий. Уровень и глубина усвоения дисциплины зависят от активной и систематической работы на лекциях, изучения рекомендованной литературы, выполнения контрольных письменных заданий

Курс изучается на лекциях, семинарах, при самостоятельной и индивидуальной работе обучающихся. Обучающийся для полного освоения материала должен не

пропускать занятия и активно участвовать в учебном процессе. Лекции включают все темы и основные вопросы теории и практики страхования. Для максимальной эффективности изучения необходимо постоянно вести конспект лекций, знать рекомендуемую преподавателем литературу, позволяющую дополнить знания и лучше подготовиться к семинарским занятиям.

В соответствии с учебным планом на каждую тему выделено необходимое количество часов практических занятий, которые проводятся в соответствии с вопросами, рекомендованными к изучению по определенным темам. Обучающиеся должны регулярно готовиться к семинарским занятиям и участвовать в обсуждении вопросов. При подготовке к занятиям следует руководствоваться конспектом лекций и рекомендованной литературой. Тематический план дисциплины, учебно-методические материалы, а также список рекомендованной литературы приведены в рабочей программе

В ходе изучения дисциплины обучающийся имеет возможность выступления с докладом по реферату в группе, который проводится в форме презентации с использованием мультимедийной техники.

### ***Методические рекомендации при работе над конспектом во время проведения лекции***

В процессе лекционных занятий целесообразно конспектировать учебный материал. Для этого используются общие и утвердившиеся в практике правила, и приемы конспектирования лекций:

Конспектирование лекций ведется в специально отведенной для этого тетради, каждый лист которой должен иметь поля, на которых делаются пометки из рекомендованной литературы, дополняющие материал прослушанной лекции, а также подчеркивающие особую важность тех или иных теоретических положений.

Целесообразно записывать тему и план лекций, рекомендуемую литературу к теме. Записи разделов лекции должны иметь заголовки, подзаголовки, красные строки. Для выделения разделов, выводов, определений, основных идей можно использовать цветные карандаши и фломастеры.

Названные в лекции ссылки на первоисточники надо пометить на полях, чтобы при самостоятельной работе найти и вписать их. В конспекте дословно записываются определения понятий, категорий и законов. Остальное должно быть записано своими словами.

Каждому студенту необходимо выработать и использовать допустимые сокращения наиболее распространенных терминов и понятий.

### ***Методические рекомендации по организации самостоятельной работы***

Самостоятельная работа (по В.И. Далу «самостоятельный – человек, имеющий свои твердые убеждения») осуществляется при всех формах обучения: очной и заочной.

Самостоятельная работа обучающихся - способ активного, целенаправленного приобретения студентом новых для него знаний и умений без непосредственного участия в этом процесса преподавателей. Повышение роли самостоятельной работы обучающихся при проведении различных видов учебных занятий предполагает:

- оптимизацию методов обучения, внедрение в учебный процесс новых технологий обучения, повышающих производительность труда преподавателя, активное использование информационных технологий, позволяющих обучающемуся в удобное для него время осваивать учебный материал;
- широкое внедрение компьютеризированного тестирования;
- совершенствование методики проведения практик и научно-исследовательской работы обучающихся, поскольку именно эти виды учебной работы в первую очередь готовят обучающихся к самостоятельному выполнению профессиональных задач;
- модернизацию системы курсового и дипломного проектирования, которая должна повышать роль студента в подборе материала, поиске путей решения задач.

Самостоятельная работа приводит студента к получению нового знания, упорядочению и углублению имеющихся знаний, формированию у него профессиональных навыков и умений. Самостоятельная работа выполняет ряд функций:

- развивающую;
- информационно-обучающую;
- ориентирующую и стимулирующую;
- воспитывающую;
- исследовательскую.

В рамках курса выполняются следующие виды самостоятельной работы:

1. Проработка учебного материала (по конспектам, учебной и научной литературе);
2. Выполнение разноуровневых задач и заданий;
3. Работа с тестами и вопросами для самопроверки;
4. Выполнение итоговой контрольной работы.

Студентам рекомендуется с самого начала освоения курса работать с литературой и предлагаемыми заданиями в форме подготовки к очередному аудиторному занятию. При этом актуализируются имеющиеся знания, а также создается база для усвоения нового материала, возникают вопросы, ответы на которые студент получает в аудитории.

Необходимо отметить, что некоторые задания для самостоятельной работы по курсу имеют определенную специфику. При освоении курса студент может пользоваться библиотекой вуза, которая в полной мере обеспечена соответствующей литературой. Значительную помощь в подготовке к очередному занятию может оказать имеющийся в учебно-методическом комплексе краткий конспект лекций. Он же может использоваться и для закрепления полученного в аудитории материала. Самостоятельная работа студентов предусмотрена учебным планом и выполняется в обязательном порядке. Задания предложены по каждой изучаемой теме и могут готовиться индивидуально или в группе. По необходимости студент может обращаться за консультацией к преподавателю. Выполнение заданий контролируется и оценивается преподавателем.

Для успешного самостоятельного изучения материала сегодня используются различные средства обучения, среди которых особое место занимают информационные технологии разного уровня и направленности: электронные учебники и курсы лекций, базы тестовых заданий и задач. Электронный учебник представляет собой программное средство, позволяющее представить для изучения теоретический материал, организовать апробирование, тренаж и самостоятельную творческую работу, помогающее студентам и преподавателю оценить уровень знаний в определенной тематике, а также содержащее необходимую справочную информацию. Электронный учебник может интегрировать в себе возможности различных педагогических программных средств: обучающих программ, справочников, учебных баз данных, тренажеров, контролирующих программ.

Для успешной организации самостоятельной работы все активнее применяются разнообразные образовательные ресурсы в сети Интернет: системы тестирования по различным областям, виртуальные лекции, лаборатории, при этом пользователю достаточно иметь компьютер и подключение к Интернету для того, чтобы связаться с преподавателем, решать вычислительные задачи и получать знания. Использование сетей усиливает роль самостоятельной работы студента и позволяет кардинальным образом изменить методику преподавания.

Студент может получать все задания и методические указания через сервер, что дает ему возможность привести в соответствие личные возможности с необходимыми для выполнения работ трудозатратами. Студент имеет возможность выполнять работу дома или в аудитории. Большое воспитательное и образовательное значение в самостоятельном учебном труде студента имеет самоконтроль. Самоконтроль возбуждает и поддерживает внимание и интерес, повышает активность памяти и мышления, позволяет студенту своевременно обнаружить и устранить допущенные ошибки и недостатки, объективно



определить уровень своих знаний, практических умений. Самое доступное и простое средство самоконтроля с применением информационно-коммуникационных технологий - это ряд тестов «on-line», которые позволяют в режиме реального времени определить свой уровень владения предметным материалом, выявить свои ошибки и получить рекомендации по самосовершенствованию.

### ***Методические рекомендации по работе с литературой***

Всю литературу можно разделить на учебники и учебные пособия, оригинальные научные монографические источники, научные публикации в периодической печати. Из них можно выделить литературу основную (рекомендуемую), дополнительную и литературу для углубленного изучения дисциплины.

Изучение дисциплины следует начинать с учебника, поскольку учебник – это книга, в которой изложены основы научных знаний по определенному предмету в соответствии с целями и задачами обучения, установленными программой.

При работе с литературой необходимо учитывать, что имеются различные виды чтения, и каждый из них используется на определенных этапах освоения материала.

*Предварительное* чтение направлено на выявление в тексте незнакомых терминов и поиск их значения в справочной литературе. В частности, при чтении указанной литературы необходимо подробнейшим образом анализировать понятия.

*Сквозное чтение* предполагает прочтение материала от начала до конца. Сквозное чтение литературы из приведенного списка дает возможность студенту сформировать свод основных понятий из изучаемой области и свободно владеть ими.

*Выборочное* – наоборот, имеет целью поиск и отбор материала. В рамках данного курса выборочное чтение, как способ освоения содержания курса, должно использоваться при подготовке к практическим занятиям по соответствующим разделам.

*Аналитическое чтение* – это критический разбор текста с последующим его конспектированием. Освоение указанных понятий будет наиболее эффективным в том случае, если при чтении текстов студент будет задавать к этим текстам вопросы. Часть из этих вопросов сформулирована в ФОС в перечне вопросов для собеседования. Перечень этих вопросов ограничен, поэтому важно не только содержание вопросов, но сам принцип освоения литературы с помощью вопросов к текстам.

Целью *изучающего* чтения является глубокое и всестороннее понимание учебной информации. Есть несколько приемов изучающего чтения:

1. Чтение по алгоритму предполагает разбиение информации на блоки: название; автор; источник; основная идея текста; фактический материал; анализ текста путем сопоставления имеющихся точек зрения по рассматриваемым вопросам; новизна.

2. Прием постановки вопросов к тексту имеет следующий алгоритм:

- медленно прочитать текст, стараясь понять смысл изложенного;
- выделить ключевые слова в тексте;
- постараться понять основные идеи, подтекст и общий замысел автора.

3. Прием тезирования заключается в формулировании тезисов в виде положений, утверждений, выводов.

К этому можно добавить и иные приемы: прием реферирования, прием комментирования.

Важной составляющей любого солидного научного издания является список литературы, на которую ссылается автор. При возникновении интереса к какой-то обсуждаемой в тексте проблеме всегда есть возможность обратиться к списку относящейся к ней литературы. В этом случае вся проблема как бы разбивается на составляющие части, каждая из которых может изучаться отдельно от других. При этом важно не терять из вида общий контекст и не погружаться чрезмерно в детали, потому что таким образом можно не увидеть главного.

Подготовка к экзамену должна проводиться на основе лекционного материала,

материала практических занятий с обязательным обращением к основным учебникам по курсу. Это позволит исключить ошибки в понимании материала, облегчит его осмысление, прокомментирует материал многочисленными примерами.

### ***Методические рекомендации для подготовки к экзамену:***

Экзамен в VII-м семестре является формой итогового контроля знаний и умений, обучающихся по данной дисциплине, полученных на лекциях, практических занятиях и в процессе самостоятельной работы. Основой для определения оценки служит уровень усвоения обучающимися материала, предусмотренного данной рабочей программой. К экзамену допускаются студенты, набравшие 36 и более баллов по итогам текущего и промежуточного контроля. На экзамене студент может набрать от 15 до 30 баллов.

В период подготовки к экзамену обучающиеся вновь обращаются к учебно-методическому материалу и закрепляют промежуточные знания.

Подготовка обучающегося к экзамену включает три этапа:

- самостоятельная работа в течение семестра;
- непосредственная подготовка в дни, предшествующие экзамену по темам курса;
- подготовка к ответу на экзаменационные вопросы.

При подготовке к экзамену обучающимся целесообразно использовать материалы лекций, учебно-методические комплексы, нормативные документы, основную и дополнительную литературу.

На экзамен выносятся материалы в объеме, предусмотренном рабочей программой учебной дисциплины за семестр. Экзамен проводится в письменной / устной форме.

При проведении экзамена в письменной (устной) форме, ведущий преподаватель составляет экзаменационные билеты, которые включают в себя: тестовые задания; теоретические задания; задачи или ситуации. Формулировка теоретических заданий совпадает с формулировкой перечня экзаменационных вопросов, доведенных до сведения обучающихся накануне экзаменационной сессии. Содержание вопросов одного билета относится к различным разделам программы с тем, чтобы более полно охватить материал учебной дисциплины.

В аудитории, где проводится устный экзамен, должно одновременно находиться не более шести студентов на одного преподавателя, принимающего экзамен. На подготовку ответа на билет на экзамене отводится 40 минут.

При проведении письменного экзамена на работу отводится 60 минут.

Результат устного (письменного) экзамена выражается оценками:

***Оценка «отлично» – от 91 до 100 баллов*** – теоретическое содержание курса освоено полностью, без пробелов, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы. Все предусмотренные программой обучения учебные задания выполнены, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к максимальному. На экзамене студент демонстрирует глубокие знания предусмотренного программой материала, умеет четко, лаконично и логически последовательно отвечать на поставленные вопросы.

***Оценка «хорошо» – от 81 до 90 баллов*** – теоретическое содержание курса освоено, необходимые практические навыки работы сформированы, выполненные учебные задания содержат незначительные ошибки. На экзамене студент демонстрирует твердые знания основного (программного) материала, умеет четко, грамотно, без существенных неточностей отвечать на поставленные вопросы.

***Оценка «удовлетворительно» – от 61 до 80 баллов*** – теоретическое содержание курса освоено не полностью, необходимые практические навыки работы сформированы частично, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. На экзамене студент демонстрирует знание только основного материала, ответы содержат неточности, слабо аргументированы, нарушена последовательность изложения материала.

***Оценка «неудовлетворительно» – от 36 до 60 баллов*** – теоретическое

содержание курса не освоено, необходимые практические навыки работы не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки, дополнительная самостоятельная работа над материалом курса не приведет к существенному повышению качества выполнения учебных заданий. На экзамене студент демонстрирует незнание значительной части программного материала, существенные ошибки в ответах на вопросы, неумение ориентироваться в материале, незнание основных понятий дисциплины

## **8. Материально-техническое обеспечение дисциплины**

### **8.1. Требования к материально-техническому обеспечению**

Для реализации рабочей программы дисциплины имеются специальные помещения для проведения занятий лекционного и практического типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы и помещения для хранения и профилактического обслуживания оборудования. Специальные помещения укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления информации большой аудитории.

Материально-техническое обеспечение модуля: доступ к фондам учебных пособий, библиотечным фондам с периодическими изданиями по соответствующим темам, наличие компьютеров, подключенных к сети Интернет и оснащенных средствами медиапрезентаций (медиакоммуникаций).

Чтение лекций проводится в лекционном зале, обеспеченном мультимедийными средствами (презентационная лекционная часть доступна обучающимся).

КБГУ обеспечен необходимым комплектом лицензионного программного обеспечения:

При проведении занятий лекционного/ семинарского типа занятий используются:  
*лицензионное программное обеспечение:*

- программное обеспечение средств антивирусной защиты Kaspersky Endpoint Security для бизнеса - Стандартный Russian Edition. 1000-1500 Node 1 year Educational Renewal License (KL4863RAVFQ);

- программное обеспечение для работы с PDF-документами. ABBYY FineReader 15 Business;

- программное обеспечение для работы с документами формата PDF Acrobat Pro DC for teams ALL Multiple Platforms Multi European Languages Level 1 (1-9) Education Named License 65297997BB01A12;

- офисное программное обеспечение МойОфис Стандартный.

*свободно распространяемые программы:*

- Web Browser – Firefox;
- AcademicMarthCADLicense - математическое программное обеспечение, которое позволяет выполнять, анализировать важнейшие инженерные расчеты и обмениваться ими;
- 7zip - программ для сжатия и распаковки файлов;
- AdobeReader– программа для чтения PDF файлов;
- DjvuReader – приложения для распознавания, конвентирования и работы с Djvu файлами.

При осуществлении образовательного процесса студентами и преподавателем используются следующие информационно справочные системы: ЭБС «АйПиЭрбукс», ЭБС «Консультант студента», СПС «Консультант плюс», СПС «Гарант».

## **8.2. Особенности реализации дисциплины для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья**

Для студентов с ограниченными возможностями здоровья созданы специальные условия для получения образования. В целях доступности получения высшего образования по образовательным программам инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья университетом обеспечивается:

1. Альтернативная версия официального сайта в сети «Интернет» для слабовидящих;

2. Для инвалидов с нарушениями зрения (слабовидящие, слепые) - присутствие ассистента, оказывающего обучающемуся необходимую помощь, дублирование вслух справочной информации о расписании учебных занятий; наличие средств для усиления остаточного зрения, брайлевской компьютерной техники, видеоувеличителей, программ не визуального доступа к информации, программ-синтезаторов речи и других технических средств приема-передачи учебной информации в доступных формах для студентов с нарушениями зрения;

3. Для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья по слуху (слабослышащие, глухие) – звукоусиливающая аппаратура, мультимедийные средства и другие технические средства приема-передачи учебной информации в доступных формах;

4. Для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья, имеющих нарушения опорно-двигательного аппарата, созданы материально-технические условия обеспечивающие возможность беспрепятственного доступа обучающихся в учебные помещения, объекту питания, туалетные и другие помещения университета, а также пребывания в указанных помещениях (наличие расширенных дверных проемов, поручней и других приспособлений).

Обучающиеся из числа лиц с ограниченными возможностями здоровья обеспечены электронными образовательными ресурсами в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья.

Обучающимся с ограниченными возможностями здоровья предоставляются специальные учебники и учебные пособия, иная учебная литература, специальные технические средства обучения коллективного и индивидуального пользования, предоставление услуг ассистента (помощника), оказывающего обучающимся необходимую техническую помощь, а также услуги сурдопереводчиков и тифлосурдопереводчиков.

а) для слабовидящих:

- на экзамене присутствует ассистент, оказывающий студенту необходимую техническую помощь с учетом индивидуальных особенностей (он помогает занять рабочее место, передвигаться, прочитать и оформить задание, в том числе записывая под диктовку);

- задания для выполнения, а также инструкция о порядке проведения зачете/экзамена оформляются увеличенным шрифтом;

- задания для выполнения на экзамене зачитываются ассистентом;

- письменные задания выполняются на бумаге, надиктовываются ассистенту;

- обеспечивается индивидуальное равномерное освещение не менее 300 люкс;

- студенту для выполнения задания при необходимости предоставляется увеличивающее устройство;

в) для глухих и слабослышащих:

- на зачете/экзамене присутствует ассистент, оказывающий студенту необходимую техническую помощь с учетом индивидуальных особенностей (он помогает занять рабочее место, передвигаться, прочитать и оформить задание, в том числе записывая под диктовку);

- зачет/экзамен проводится в письменной форме;
- обеспечивается наличие звукоусиливающей аппаратуры коллективного пользования, при необходимости поступающим предоставляется звукоусиливающая аппаратура индивидуального пользования;
- по желанию студента экзамен может проводиться в письменной форме;
- д) для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата (тяжелыми нарушениями двигательных функций верхних конечностей или отсутствием верхних конечностей):
  - письменные задания выполняются на компьютере со специализированным программным обеспечением или надиктовываются ассистенту;
  - по желанию студента экзамен проводится в устной форме.

## ЛИСТ

### изменений (дополнений) в рабочей программе дисциплины

«Вариационное исчисление и методы оптимизации» по направлению подготовки 01.03.01

Математика (уровень бакалавриата) (образовательная программа Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление) на \_\_\_\_\_ учебный

год

№ п/п	Элемент (пункт) РПД	Перечень выносимых изменений (дополнений)	Примечание

Обсуждена и рекомендована на заседании кафедры прикладной математики и информатики

протокол № \_\_\_\_\_ от « \_\_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 20 \_\_\_\_ г.

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_ /А.Р. Бечелова/ \_\_\_\_\_

подпись, расшифровка подписи, дата