

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**  
**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение**  
**высшего образования «Кабардино-Балкарский государственный университет**  
**им. Х.М. Бербекова» (КБГУ)**

**ИНСТИТУТ ФИЗИКИ И МАТЕМАТИКИ**  
**КАФЕДРА АЛГЕБРЫ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

**СОГЛАСОВАНО**

Руководитель образовательной  
программы \_\_\_\_\_ М.С. Нирова  
« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2024 г.

**УТВЕРЖДАЮ**

Директор ИФ и М  
\_\_\_\_\_ Б.И. Кунижев  
« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2024г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**  
**«ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ»**  
(код и наименование дисциплины)

Программа специалитета  
01.05.01 Фундаментальные математика и механика  
(код и наименование программы специалитета)

Направленность (профиль)  
Фундаментальная математика  
(наименование направленности (профиля))

Квалификация (степень) выпускника  
специалист

Форма обучения  
очная

**Нальчик 2024**

Рабочая программа дисциплины «Функциональный анализ» // сост. В.А. Водахова. – Нальчик: КБГУ, 2024. - 53 с.

Рабочая программа предназначена для студентов очной формы обучения по программе специалитета 01.05.01 Фундаментальные математика и механика, профиль «Фундаментальная математика» на 5-6 семестрах, 3 курса.

Рабочая программа составлена с учетом Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по специальности 01.05.01 Фундаментальные математика и механика (уровень специалитета), утвержденного приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации от 10.01.2018г. №16 (зарегистрировано в Минюсте РФ 6 февраля 2018г. № 49943).

## Содержание

1. Цель и задачи освоения дисциплины .....	4
2. Место дисциплины (модуля) в структуре ОПОП ВО .....	4
3. Требования к результатам освоения дисциплины .....	4
4. Содержание и структура дисциплины .....	5
5. Оценочные материалы для текущего и рубежного контроля успеваемости и промежуточной аттестации .....	14
6. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности .....	37
7. Учебно-методическое обеспечение дисциплины .....	40
7.1. Нормативно-законодательные акты .....	40
7.2. Основная литература .....	40
7.3. Дополнительная литература .....	40
7.4. Периодические издания .....	41
7.5. Интернет-ресурсы .....	41
7.6. Методические указания к практическим занятиям .....	42
7.7. Методические указания к курсовому проектированию и другим видам самостоятельной работы .....	43
8. Материально-техническое обеспечение дисциплины .....	48
8.1. Требования к материально-техническому обеспечению .....	48
8.2. Особенности реализации дисциплины для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья .....	49
Лист изменений (дополнений) .....	50
Приложение 1 .....	51
Приложение 2 .....	52

### 1. Цель и задачи освоения дисциплины

Среди математических дисциплин, исследующих те или иные математические структуры, функциональный анализ занимает важную роль.

Его методы с успехом используются во многих разделах современной теоретической и прикладной математики. Так, например, многие задачи классической математической физики сводятся к краевым задачам для дифференциальных уравнений. Основными математическими средствами исследования этих задач служат теории дифференциальных уравнений, теория функций, функциональный анализ и другие. Поэтому функциональный анализ стал необходимым элементом математического образования.

Важной особенностью функционального анализа является общая абстрактная форма рассмотрения проблем анализа, позволяющая единообразно исследовать далекие, казалось бы, друг от друга вопросы.

Именно поэтому сегодня идеи концепции и методы функционального анализа пронизывают чуть ли не все области математики, объединяя их в единое целое.

На языке функционального анализа получают ясное выражение основные проблемы прикладной и вычислительной математики.

**Функциональный анализ** – это часть современного математического анализа. Основными объектами изучения в функциональном анализе являются пространства самого общего вида, и функции (операторы, функционалы) определенные на этих пространствах. Для функционального анализа характерно сочетание и обобщение методов математического анализа, геометрии, линейной алгебры, топологии и дифференциальных уравнений, что приводит к установлению связей между отдаленными разделами математики.

Курс «Функциональный анализ» читается на математическом факультете в течение третьего курса. Он базируется на материале курсов «Математический анализ» и «Линейная алгебра».

**Цель этого курса** – изложить студентам основы современного анализа в бесконечномерных линейных пространствах, обобщающего как теорию линейных операторов в конечномерных пространствах, так и понятие предела последовательности и функций и других понятий, конечномерного анализа; показать применение основных понятий и методов функционального анализа к различным областям математики, таким как: интегральные уравнения, дифференциальные уравнения в частных производных, вариационное исчисление, выпуклый анализ, оптимальное управление и др.; научить студентов основополагающим принципам и фактам функционального анализа, показать разнообразие конкретных реализаций общих конструкций, обеспечить возможность дальнейшего самостоятельного освоения современных методов непрерывного анализа; расширить математический кругозор, поднять уровень математической культуры за счет работы с объектами более высокого уровня абстракции, по сравнению с конечномерным анализом.

### 2. Место дисциплины (модуля) в структуре ОПОП ВО

В структуре ОПОП дисциплина «Функциональный анализ» относится к части, формируемой участниками образовательных отношений Блока 1 основной образовательной программы по направлению подготовки специалитета 01.05.01 Фундаментальная математика и механика, профиль «Фундаментальная математика».

В результате освоения данной дисциплины, полученные знания будут необходимы как предшествующие при изучении дисциплин: уравнения с частными производными; комплексный анализ (теория функций комплексного переменного); элементы дробного исчисления и их приложения в теории краевых задач.

### 3. Требования к результатам освоения дисциплины

В совокупности с другими дисциплинами профиля «Фундаментальная математика» дисциплина «Функциональный анализ» направлена на формирование следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО 3++ и ОПОП ВО по направлению подготовки специалитета 01.05.01 Фундаментальная математика и механика (уровень специалитет):

**профессиональные компетенции (ПКС):**

**ПКС-1.** Умение ясно и понятно представлять математические знания с учетом уровня аудитории.

*Индикатор достижения компетенции ПКС-1:*

**ПКС-1.1.** Способен обрабатывать, анализировать и осуществлять сбор информации по заданной тематике.

**ПКС-1.2.** Способен формулировать математические знания с учетом уровня слушателей.

*Требования к результатам обучения:*

– **знание** фундаментальных разделов математики (математический анализ, аналитическую геометрию, линейную алгебру, дифференциальные уравнения, численные методы).

*Показателями освоения дисциплины является:*

- **умение** применять математические методы при решении практических задач в профессиональной деятельности; применять теоретические знания при решении практических задач,

- **владение** культурой мышления, навыками решения практических задач, навыками работы с математической литературой, математическими знаниями и методами, математическим аппаратом, необходимым для логического осмысления и обработки информации в профессиональной деятельности.

#### 4. Содержание и структура дисциплины

**Таблица 1. Содержание дисциплины «Функциональный анализ»**

№	Наименование раздела	Содержание раздела	Код контролируемой компетенции (или ее части)	Наименование оценочного средства
1	2	3	4	5
1	Введение.	Возникновение функционального анализа как самостоятельного раздела математики; современное развитие функционального анализа и его связь с другими областями математики. Множества, алгебра множеств; счетные множества и множества мощности континуума.	ПКС-1	К, РК, Т
2	Метрические пространства.	Метрики в конкретных пространствах (пространства $C[a;b]$ , $C(k)[a;b]$ , $Lp[a;b]$ ), неравенства Гельдера, Коши-Буняковского, Минковского, норма и скалярное произведение, характеристика открытых и замкнутых множеств в терминах сходящихся последовательностей, эквивалентные метрики; полные метрические пространства, критерий полноты (теорема о вложенных, замкнутых и стягивающихся шарах), теорема Бэра, теорема о пополнении; компактность и секвенциальная компактность, эквивалентность счетной и секвенциальной компактности, необходимые условия компактности (замкнутость, полнота,	ПКС-1	К, РК, Т

		ограниченность), вполне ограниченные множества и критерий компактности Хаусдорфа, критерий предкомпактности в $C[a,b]$ и в $C(X)$ , где $X$ – компактное метрическое пространство (теоремы Арцела и Арцела - Асколи); непрерывные и равномерно непрерывные отображения метрических пространств, сжимающие отображения и теорема Банаха о сжимающей отображении.		
3	Топологическое пространство.	Понятие о топологическом пространстве. Основные понятия топологии, предел и непрерывность в топологическом пространстве, аксиомы отделимости и счетности, сепарабельность; компактность: разные виды компактности, критерий компактности, связанный с центрированными множествами. Теория меры. Теорема Лебега о продолжении меры. Измеримые функции. Свойства. Сходимость почти всюду. Теорема Егорова Д.Ф. сходимость по мере. Интеграл Лебега основные свойства. Теорема об абсолютной непрерывности интеграла Лебега. Предельный переход под знаком интеграла Лебега. Сравнение интеграла Лебега и интеграла Римана.	ПКС-1	К, РК, Т
4	Линейные топологические и нормированные пространства.	Линейные топологические пространства, инвариантность открытости множества относительно операций сложения и умножения на скаляр, поглощающие множества, топология конечномерного отделимого нормированного пространства; нормированные и евклидовы пространства, как линейные топологические пространства, топология конечномерных нормированных пространств, критерий нормируемости линейных топологических пространств (теорема А.Н. Колмогорова); выпуклые и абсолютно выпуклые множества, полунормы и функционал Минковского, локально выпуклые пространства, вид единичного шара в конечномерном нормированном пространстве; лемма Рисса о почти перпендикуляре, некомпактность единичного шара в бесконечномерном нормированном пространстве, наличие полной счетной системы в сепарабельном бесконечномерном нормированном пространстве; ряды в нормированных пространствах и	ПКС-1	К, РК, Т

		<p>банаховых пространствах, евклидовы и гильбертовы пространства, наличие счетной ортонормированной полной системы в сепарабельном бесконечномерном евклидовом пространстве; ряд Фурье, экстремальное свойство частичных сумм ряда Фурье, неравенство Бесселя, сходимостъ ряда Фурье в гильбертовом пространстве, теорема Рисса-Фишера, равенство Парсеваля, замкнутые и тотальные системы; критерий замкнутости системы в гильбертовом пространстве, наличие не более чем счетного ортонормированного базиса в сепарабельном евклидовом пространстве, ортогональное дополнение, разложение гильбертового пространства в прямую сумму подпространств, существование ортогональной проекции на любое подпространство в гильбертовом пространстве.</p>		
5	<p>Линейные операторы и линейные функционалы в нормированном пространстве.</p>	<p>Критерии непрерывности линейного оператора в нормированном пространстве, норма линейного ограниченного оператора, нормированное пространство линейных ограниченных операторов, равномерная и поточечная сходимостъ, банаховостъ нормированного пространства линейного ограниченного оператора; принцип равномерной ограниченности (теорема Банаха-Штейнгауза) и его следствия; сопряженное пространство, геометрический смысл нормы линейного непрерывного функционала, сопряженные пространства к <math>l_p, C, C_0</math> и гильбертовы пространства; теорема Хана-Банаха о продолжении линейного функционала и ее следствия, дополняемость конечномерных подпространств, теоремы отделимости выпуклых множеств; слабая сходимостъ в нормированном пространстве, критерий слабой сходимости, слабая сходимостъ в <math>l_p</math>, свойства слабо сходящихся последовательностей, слабая и слабая сходимости в сопряженном пространстве, слабая секвенциальная компактность замкнутого шара в сопряженном пространстве, теорема Мазура; сопряженный оператор и его норма, эквивалентностъ непрерывности линейного оператора секвенциальной сильно-слабой и слабо-слабой</p>	ПКС-1	К, РК, Т

		<p>непрерывности, дважды сопряженный оператор; обратный к линейному оператору, соотношение норм исходного оператора и обратного к нему, теоремы Банаха об открытом отображении, о непрерывности обратного оператора, о замкнутом графике, о непрерывности оператора проектирования; лемма о тройке, связь между ядрами и образами сопряженных операторов; достаточные условия непрерывной обратимости линейного ограниченного оператора, обратный оператор к сопряженному; резольвентное множество, резольвента и ее представление, спектр и собственные значения линейного оператора, компактность спектра линейного ограниченного оператора, компактные линейные операторы, равномерный предел компактного линейного оператора, достаточные условия компактности линейных операторов, компактный линейный оператор в рефлексивных пространствах, компактность сопряженного оператора к компактному линейному оператору (теорема Шаудера), теорема о размерности ядра и замкнутости образа и оператора <math>(A - \lambda I)</math> (<math>A</math> – компактный линейный оператор), спектр компактного линейного оператора; теория Рисса-Фишера (теоремы Фредгольма, понятие об операторе); компактные и самосопряженные линейные операторы в гильбертовом пространстве, спектр самосопряженного линейного ограниченного оператора в гильбертовом пространстве, норма самосопряженного линейного ограниченного оператора в гильбертовом пространстве, существование собственных чисел у компактного самосопряженного линейного оператора, теорема Гильберта – Шмидта; функциональное исчисление самосопряженных операторов; приведение оператора к виду умножения на функцию; спектральная теорема; неограниченные самосопряженные операторы; примеры.</p>		
6	Интегральные уравнения.	<p>Интегральные операторы в <math>C[a; b]</math> и <math>L_2[a; b]</math>, их компактность; интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра, условия разрешимости этих уравнений, сжимаемость некоторой степени</p>	ПКС-1	К, РК, Т



		интегрального оператора Вольтерра с ограниченным ядром; использование теоремы Гильберта – Шмидта для нахождения решений интегрального уравнения, нахождение ядра резольвенты к интегральному оператору; сведение интегральных уравнений к системе линейных алгебраических уравнений к обыкновенным дифференциальным уравнениям.		
7	Пространства Соболева и обобщенные функции.	<p>Применение Теоремы Гильберта – Шмидта к решению уравнений в частных производных, задача Штурма–Лиувилля, теорема Лакса–Мильграна и ее применение к доказательству разрешимости уравнений в частных производных; пространства Соболева, характеристика обобщенных производных, теорема о компактном вложении <math>H_1(a;b)</math> в <math>C[a;b]</math>; пространство основных функций <math>D</math>, примеры основных функций, срезающие функции, плотность <math>D(\Omega)</math> в <math>L_2(\Omega)</math>, сходимость в пространстве <math>D</math>, непрерывность операторов дифференцирования, умножения и линейной замены переменных в <math>D</math>; пространство обобщенных функций (распределений) <math>D'</math>, регулярные и сингулярные обобщенные функции, сходимость в пространстве <math>D'</math>, непрерывность операторов дифференцирования и умножения (на бесконечно дифференцируемую функцию) в <math>D'</math>; проблема умножения обобщенных функций, бесконечная дифференцируемость обобщенных функций, наличие первообразной у обобщенных функций, дифференциальные уравнения в <math>D'</math>; локальные свойства обобщенных функций, носитель обобщенных функций, свертка основной и обобщенной функций, свойства свертки; фундаментальное решение дифференциального оператора в частных производных с постоянными коэффициентами; пространства <math>S</math> быстро убывающих функций и <math>S'</math> медленно растущих распределений, пространства <math>E</math> и <math>E'</math>.</p>	ПКС-1	К, РК, Т
8	Элементы дифференциального исчисления в линейных	Сильная (по Фреше) и слабая (по Гато) дифференцируемость отображений в Банаховом пространстве, дифференциалы Фреше и Гато, связь	ПКС-1	К, РК, Т

нормированных пространствах.	между сильной и слабой дифференцируемостью, формула конечных приращений; необходимое условие локального экстремума вещественной дифференцируемой функции в Банаховом пространстве, классические задачи вариационного исчисления; уравнение Эйлера; полилинейные отображения, дифференцируемость, производные и дифференциалы высших порядков отображений в Банаховом пространстве, симметричность оператора второй производной, формула Тейлора, достаточные условия строгого локального экстремума вещественной дифференцируемой функции в Банаховом пространстве, условия Лежандра и Якоби; теорема о неявной функции, условный экстремум вещественной дифференцируемой функции в Банаховом пространстве и метод множителей Лагранжа.		
------------------------------	---	--	--

В графе 5 приводятся планируемые формы текущего контроля: коллоквиум (К), рубежный контроль (РК), тестирование (Т).

### Структура дисциплины «Функциональный анализ»

Таблица 2. Структура дисциплины. Общая трудоемкость дисциплины составляет 8 зачетных единиц (288 часов)

Вид работы	Трудоемкость, часы		
	5 семестр	6 семестр	Всего:
<b>Общая трудоемкость (в часах)</b>	<b>144</b>	<b>144</b>	<b>288</b>
<b>Контактная работа (в часах):</b>	<b>48</b>	<b>30</b>	<b>78</b>
<i>Лекции (Л)</i>	<i>32</i>	<i>15</i>	<i>47</i>
<i>Практические занятия (ПЗ)</i>	<i>16</i>	<i>15</i>	<i>31</i>
<b>Самостоятельная работа (в часах), в том числе контактная работа:</b>	<b>96</b>	<b>114</b>	<b>210</b>
<i>Контрольная работа (К)</i>	<i>6</i>	<i>6</i>	<i>12</i>
<i>Самостоятельное изучение разделов</i>	<i>81</i>	<i>81</i>	<i>162</i>
<i>Подготовка и прохождение промежуточной аттестации</i>	<i>9</i>	<i>27</i>	<i>36</i>
<b>Вид промежуточной аттестации</b>	<b>Зачет</b>	<b>Экзамен</b>	<b>Зачет Экзамен</b>

Таблица 3. Лекционные занятия

№	Тема
1	Введение. Возникновение функционального анализа, как самостоятельного раздела математики. Современное развитие функционального анализа и его связь с другими областями математики. Цель и задачи изучения темы – раскрыть основные понятия теории функционального анализа.

2	Множества. Алгебра множеств. Счетные множества и множества мощности континуума. Функциональная зависимость. Пространство. Упорядоченность. Цель и задачи изучения темы – применить основы алгебры множеств к счетным множествам, ввести понятие пространства.
3	Системы множеств. Системы множеств и отображения. Кольцо множеств, полукольцо множеств. $\sigma$ – алгебра множеств. Цель и задачи изучения темы – изучение систем множеств и их отображений, введение $\sigma$ – алгебры множеств.
4	Метрические пространства. Примеры. Неравенства Гельдера и Минковского. Цель и задачи изучения темы – введение понятия метрического пространства, свойств и метрик основных пространств.
5	Непрерывные отображения метрических пространств. Предельные точки. Замыкание. Плотные множества. Открытые и замкнутые множества. Цель, задачи изучения темы – понятия непрерывного отображения предельных точек, открытых и замкнутых множеств.
6	Плотные метрические пространства. Теоремы о вложенных шарах и Бэра. Цель и задачи изучения темы – введения понятия плотного множества и его применение в функциональном анализе.
7	Принцип сжимающих отображений и его применение. Интегральные уравнения Вольтерра и Фредгольма. Цель и задачи изучения темы – принцип сжимающих отображений и его применение при решении интегральных уравнений.
8	Топологические пространства. Компактность в метрических пространствах. Компактность и полная ограниченность. Цель и задачи изучения темы – введение понятия компактности и полной ограниченности. Доказательство основных теорем.
9	Теория меры. Внешняя мера. Продолжение меры с полукольца на прохожденное кольцо. Теорема Лебега о продолжении меры. Цель и задачи изучения темы – введение понятия меры и теоремы Лебега о продолжении меры.
10	Измеримые функции. Определение и основные свойства. Сходимость почти всюду. Теорема Егорова Д.Ф. Сходимость по мере. Цель и задачи изучения темы – введение понятия измеримых функций, их свойства, применение.
11	Интеграл Лебега. Основные свойства. Теорема об абсолютной непрерывности интеграла Лебега. Цель и задачи изучения темы – изучение интеграла Лебега и его свойств. Доказательство теоремы об абсолютной непрерывности интеграла Лебега.
12	Предельный переход под знаком интеграла Лебега. Теоремы Лебега, Леви, Фату. Сравнение интеграла Лебега и Римана. Цель и задачи изучения темы – предельный переход под знаком интеграла Лебега и его применение, сравнение интеграла Лебега и Римана.
13	Непредельный интеграл Лебега. Функции с ограниченным изменением. Теорема Радона – Никодима. Цель, задачи изучения темы – понятие функции с ограниченным изменением.
14	Интеграл Стильтеса. Мера Стильтеса. Прямое произведение мер. Теорема Фубина. Цель и задачи изучения темы – мера Стильтеса и прямое произведение мер. Доказательство теоремы Фубина.
15	Линейные пространства на функционалы. Банаховы пространства. Евклидовы пространства. Цель и задачи изучения темы – введение понятия линейных пространств, Банаховых и Евклидовых.
16	Линейные операторы непрерывность и ограниченность. Норма оператора. Сумма и произведение операторов. Цель и задачи изучения темы – введение понятия нормы и нормированных пространств.
17	Обратные операторы. Теоремы об обратном операторе. Спектр оператора. Резольвента. Цель и задачи изучения темы – введение понятия обратного оператора, спектра и резольвенты ядра.
18	Сопряженное пространство. Рефлексивные пространства. Сильная топология в сопряженном пространстве. Цель и задачи изучения темы – определения понятий, сопряженного и рефлексивного пространств.

19	Сопряженные операторы. Сопряженный оператор в евклидовом пространстве. Самосопряженные операторы. Унитарные операторы. Компактные операторы. Определение и примеры компактных операторов. Собственные значения компактного оператора. Цель и задачи изучения темы – основные операторы в Евклидовом пространстве и их приложения.
20	Понятие об индексе. Теорема Фредгольма. Примеры использования теоремы Фредгольма: задача Штурма-Лиувилля, теория потенциала, индекс дифференциального оператора. Расширение понятия функции. Пространство основных функций. Обобщенные функции. Действия над обобщенными функциями. Цель и задачи изучения темы – введение понятия собственных функций. Задача Штурма-Лиувилля.
21	Дифференциальные уравнения в классе обобщенных функций. Комплексные обобщенные функции, обобщенные функции на окружности. Гильбертово пространство. Скалярное произведение. Неравенство Коши–Буняковского–Шварца. Цель и задачи изучения темы – введение понятия обобщенной функции и действия над ними.
22	Ортогональные системы. Неравенство Бесселя. Базисы. Гильбертова разрешимость. Теорема об изоморфизме. Ортогональное дополнение. Общий вид линейного функционала. Спектр Эрмитова и унитарного оператора. Теорема Гильберта о компактных эрмитовых операторах. Цель и задачи изучения темы – введение понятия унитарного оператора и его применение.
23	Ряды Фурье. Достаточные условия сходимости ряда Фурье в точке. Условия равномерной сходимости ряда Фурье. Интеграл Фурье. Основная теорема. Интеграл Фурье в комплексной форме. Цель и задачи изучения темы – изучение рядов Фурье.
24	Преобразование Фурье и формула обращения. Основные свойства преобразования Фурье. Свертка функции. Преобразование Фурье в пространство $L_2(-\infty, \infty)$ . Преобразование Лапласа. Определение и основные свойства. Применение преобразования Лапласа. Преобразование Фурье обобщенных функций. Цель и задачи изучения темы – применение преобразований Фурье и Лапласа в пространство $L_2(-\infty, \infty)$ .
25	Линейные интегральные уравнения. Основные определения. Задачи, приводящие к интегральным уравнениям. Интегральный оператор Фредгольма. Уравнения с симметрическим ядром. Теоремы Фредгольма для общего случая уравнения Фредгольма. Интегральные уравнения с ядром, имеющим слабую особенность. Характер решения интегрального уравнения. Цель и задачи изучения темы – интегральные уравнения и задачи, приводящие к ним.
26	Уравнения Вольтерра. Интегральные уравнения, содержащие параметр. Метод Фредгольма. Дифференцирование в линейных пространствах. Сильный дифференциал. Слабый дифференциал. Дифференцируемые функционалы. Формула Тейлора. Теорема о неявной функции и некоторые ее применения. Второй функционал. Достаточные условия экстремума функционала. Цель и задачи изучения темы – интегральные уравнения и методы их решения.

Таблица 4. Практические занятия

№	Тема
1	Алгебра множеств. Счётные множества. Мощность множества. Функциональная зависимость. Пространство. Упорядоченность.
2	Метрические пространства. Неравенство Гельдера–Минковского. Сходимость. Полнота.
3	Непрерывные отображения метрических пространств. Предельные точки. Замыкание. Плотные множества. Открытые и замкнутые множества.
4	Принцип сжимающих отображений и его применения. Интегральные уравнения Вольтерра

	и Фредгольма.
5	Компактные множества в метрических пространствах.
6	Теория меры. Внешняя мера. Теорема Лебега о продолжении меры. Измеримые функции. Определение и основные свойства. Сходимость почти всюду. Сходимость по мере.
7	Интеграл Лебега. Основные свойства. Сравнение интеграла Лебега и Римана. Неопределенный интеграл Лебега.
8	Нормированные и Банаховы пространства.
9	Линейные операторы. Непрерывность и ограниченность. Норма оператора. Сумма и произведение операторов. Пространство линейных ограниченных операторов.
10	Обратные операторы. Спектр оператора. Резольвента.
11	Сопряженное пространство. Рефлексивное пространство. Сопряженные операторы.
12	Компактные операторы. Определения и примеры. Собственные значения компактного оператора.
13	Понятие об индексе. Теорема Фредгольма. Задача Штурма-Лиувилля. Индекс дифференциального оператора.
14	Обобщенные функции. Действия над обобщенными функциями. ДУ в классе обобщенных функций.
15	Гильбертовы пространства. Самосопряженные операторы. Спектр самосопряженного оператора.
16	Ряды Фурье. Достаточные условия сходимости ряда Фурье в точке. Условия равномерной сходимости ряда Фурье. Интеграл Фурье. Интегральные преобразования.
17	Интегральные уравнения Вольтерра. Интегральные уравнения, содержащие параметр. Метод Фредгольма.
18	Интегральные уравнения Фредгольма. Резольвента интегрального уравнения Фредгольма.
19	Элементы дифференциального исчисления Банаховых пространств.
20	Теоремы о неявной функции. Второй функционал. Достаточные условия экстремума функционала.

Таблица 5. Самостоятельное изучение разделов дисциплины

№ п/п	Вопросы, выносимые на самостоятельное изучение
1.	Метрические пространства: критерий предкомпактности в $C[a, b]$ и в $C(X)$ , где $X$ – компактное метрическое пространство (теоремы Арцела и Арцела-Асколи); непрерывные и равномерно непрерывные отображения метрических пространств, сжимающие отображения и теорема Банаха о сжимающей отображении.
2.	Топологическое пространство: разные виды компактности, критерий компактности, связанный с центрированными множествами.
3.	ряд Фурье, неравенство Бесселя, сходимость ряда Фурье в гильбертовом пространстве, теорема Рисса-Фишера.
4.	Линейные операторы и линейные функционалы в нормированном пространстве: спектр самосопряженного линейного ограниченного оператора в гильбертовом пространстве, норма самосопряженного линейного ограниченного оператора в гильбертовом пространстве, существование собственных чисел у компактного самосопряженного линейного оператора, теорема Гильберта – Шмидта.
5.	Интегральные уравнения:

	сведение интегральных уравнений к системе линейных алгебраических уравнений к обыкновенным дифференциальным уравнениям.
6.	Пространства Соболева и обобщенные функции: пространства Соболева, характеристика обобщенных производных, теорема о компактном вложении $H_1(a;b)$ в $C[a;b]$ .
7.	Элементы дифференциального исчисления в линейных нормированных пространствах: достаточные условия строгого локального экстремума вещественной дифференцируемой функции в Банаховом пространстве, условия Лежандра и Якоби.

## **5. Оценочные материалы для текущего и рубежного контроля успеваемости и промежуточной аттестации**

Оценочные материалы предназначены для установления соответствия уровня подготовки обучающихся требованиям Федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования (ФГОС ВО). Оценочные материалы (ОМ) являются центральным звеном системы оценки качества освоения обучающимся дисциплины. Целью разработки ОМ по дисциплине является оценка знаний, умений, навыков и уровня освоения обучающимися компетенций дисциплины.

ОМ дисциплины является составной частью рабочей программы дисциплины. Это – *оценочные средства, контрольно-измерительные и методические материалы*, предназначенные для определения качества результатов обучения и уровня сформированности комплектаций обучающихся в ходе освоения дисциплины.

Оценочные средства формируются на основе ключевых *принципов оценивания*:

- валидность – объекты оценки должны соответствовать поставленным целям обучения;
- надёжность – при оценивании достижений обучающихся должны использоваться единообразные стандарты и критерии;
- развивающего характера – фиксация персональных достижений обучающихся и предполагаемые мероприятия по улучшению результатов;
- своевременность – поддержание обратной связи с обучающимися при освоении учебных материалов.

Формирование оценочных средств дисциплины проходит следующие *этапы*:

- формируется система показателей, характеризующих состояние и динамику развития компетенций обучающихся и выпускников;
- определяются оценочные средства и процедуры оценивания знаний, умений, навыков, овладения компетенциями обучающихся.

Устный опрос учебной проводится с целью выявления и закрепления полученных знаний и умений, определения уровня подготовленности к изучению новой темы.

Коллоквиум предусматривает развёрнутое изложение по определённому вопросу, основанное на привлечении теоретического материала с целью активизации самостоятельной работы обучающегося по изучению материала. Он позволяет оценить умения студентов самостоятельно работать с учебным и научным материалом, выявить объем полученных знаний, полученных на занятиях, а также путем самостоятельной работы.

Компьютерное тестирование проводится для закрепления и проверки знаний, умений и навыков с применением технических средств.

Конечными результатами освоения программы дисциплины являются сформированные когнитивные дескрипторы «знать», «уметь», «владеть», расписанные по отдельным компетенциям. Формирование этих дескрипторов происходит в течение всего семестра по этапам в рамках различного вида знаний и самостоятельной работы.

В ходе изучения дисциплины предусматриваются *текущий контроль, рубежный контроль и промежуточная аттестация*.

*Контрольные мероприятия по дисциплине* проводятся в соответствии с Положением о балльно-рейтинговой системе аттестации студентов КБГУ (19.01.2016г.). Оценка успеваемости

студентов осуществляется в ходе текущего и рубежного контроля, а также промежуточной аттестации.

### 5.1. Оценочные материалы для текущего контроля

*Текущий контроль* знаний, умений и владений по дисциплине осуществляется в форме устного или письменного опроса на лекционных и практических занятиях, а также в ходе проведения самостоятельной работы студентов.

*Цель текущего контроля* – оценка результатов работы в семестре и обеспечение своевременной обратной связи, для коррекции обучения, активизации самостоятельной работы обучающегося. Объектом текущего контроля являются конкретизированные результаты обучения (учебные достижения) по дисциплине.

*Текущий контроль* успеваемости обеспечивает оценивание хода освоения дисциплины «Функциональный анализ» и включает: ответы на теоретические вопросы на практическом занятии, решение практических задач и выполнение заданий на практических занятиях, самостоятельное выполнение индивидуальных домашних заданий с отчетом (защитой) в установленный срок.

Оценка качества подготовки на основании выполненных заданий ведется преподавателем (с обсуждением результатов), баллы начисляются в зависимости от сложности и качества выполнения задания.

#### 5.1.1. Вопросы по темам дисциплины «Функциональный анализ»

(контролируемые компетенции ПКС-1)

##### **Тема 1. Введение основных понятий функционального анализа.**

*Цель и задачи изучения темы* – раскрыть основные понятия теории функционального анализа. Аксиомы метрического пространства.

1. Возникновение функционального анализа как самостоятельного раздела математики.
2. Современное развитие функционального анализа и его связь с другими областями математики.
3. Множества, алгебра множеств.
4. Счетные множества и множества мощности континуума.

##### **Тема 2. Метрические пространства.**

*Цель и задачи изучения темы* – введение понятия метрического пространства, свойств и метрик основных пространств.

1. Метрики в конкретных пространствах (пространства  $C[a;b]$ ,  $C(k)[a;b]$ ,  $Lp[a;b]$ ), неравенства Гельдера, Коши-Буняковского, Минковского.
2. Эквивалентные метрики; полные метрические пространства, критерий полноты (теорема о вложенных, замкнутых и стягивающихся шарах).
3. Теорема Бэра, теорема о пополнении, компактность и секвенциальная компактность.
4. Эквивалентность счетной и секвенциальной компактности, необходимые условия компактности (замкнутость, полнота, ограниченность), вполне ограниченные множества и критерий компактности Хаусдорфа.
5. Критерий предкомпактности в  $C[a,b]$  и в  $C(X)$ , где  $X$  – компактное метрическое пространство (теоремы Арцела и Арцела - Асколи).
6. Непрерывные и равномерно непрерывные отображения метрических пространств.
7. Сжимающие отображения и теорема Банаха о сжимающей отображении.

##### **Тема 3. Топологические пространства.**

*Цель и задачи изучения темы* – введения понятия плотного множества и его применение в функциональном анализе.

1. Понятие о топологическом пространстве. Основные понятия топологии.
2. Предел и непрерывность в топологическом пространстве.

3. Аксиомы отделимости и счетности, сепарабельность.
4. Компактность: разные виды компактности, критерий компактности, связанный с центрированными множествами.

#### **Тема 4. Линейные топологические и нормированные пространства.**

*Цель и задачи изучения темы* – введения понятия топологических и нормированных пространств и операции в этих пространствах.

1. Линейные топологические пространства, инвариантность открытости множества относительно операций сложения и умножения на скаляр, поглощающие множества.
2. Топология конечномерного отделимого нормированного пространства
3. Нормированные и евклидовы пространства, как линейные топологические пространства, топология конечномерных нормированных пространств, критерий нормируемости линейных топологических пространств (теорема А.Н. Колмогорова).
4. Выпуклые и абсолютно выпуклые множества.
5. Полунормы и функционал Минковского, локально выпуклые пространства, вид единичного шара в конечномерном нормированном пространстве.
6. Ряды в нормированных пространствах и банаховых пространствах, евклидовы и гильбертовы пространства.
7. Ряд Фурье, экстремальное свойство частичных сумм ряда Фурье.
8. Неравенство Бесселя, сходимость ряда Фурье в гильбертовом пространстве.
9. Ортогональное дополнение, разложение гильбертового пространства в прямую сумму подпространств, существование ортогональной проекции на любое подпространство в гильбертовом пространстве.

#### **Тема 5. Линейные операторы и линейные функционалы в нормированном пространстве.**

*Цель и задачи изучения темы* – введение понятия линейного оператора и линейного функционала в нормированном пространстве.

1. Критерии непрерывности линейного оператора в нормированном пространстве.
2. Норма линейного ограниченного оператора, нормированное пространство линейных ограниченных операторов.
3. Равномерная и поточечная сходимость.
4. Банаховость нормированного пространства линейного ограниченного оператора; принцип равномерной ограниченности (теорема Банаха-Штейнгауза) и его следствия;
5. Сопряженное пространство, геометрический смысл нормы линейного непрерывного функционала, сопряженные пространства к  $l_p$ ,  $C$ ,  $C_0$  и гильбертовы пространства.
6. Теорема Хана-Банаха о продолжении линейного функционала и ее следствия, дополняемость конечномерных подпространств, теоремы отделимости выпуклых множеств.
7. Слабая сходимость в нормированном пространстве, критерий слабой сходимости, слабая сходимость в  $l_p$ .
8. Сопряженный оператор и его норма, дважды сопряженный оператор.
9. Обратный к линейному оператору, соотношение норм исходного оператора и обратного к нему.
10. Теоремы Банаха об открытом отображении, о непрерывности обратного оператора, о замкнутом графике.
11. Достаточные условия непрерывной обратимости линейного ограниченного оператора, обратный оператор к сопряженному.
12. Резольвентное множество, резольвента и ее представление.
13. Спектр и собственные значения линейного оператора, компактность спектра линейного ограниченного оператора.
14. Компактные линейные операторы, равномерный предел компактного линейного оператора, достаточные условия компактности линейных операторов.



15. Компактный линейный оператор в рефлексивных пространствах, компактность сопряженного оператора к компактному линейному оператору.
16. Компактные и самосопряженные линейные операторы в гильбертовом пространстве, спектр самосопряженного линейного ограниченного оператора в гильбертовом пространстве, норма самосопряженного линейного ограниченного оператора в гильбертовом пространстве.

### **Тема 6. Интегральные уравнения.**

*Цель и задачи изучения темы* – ознакомить с методами решения интегральных уравнений.

1. Интегральные операторы в  $C[a; b]$  и  $L_2[a; b]$ , их компактность.
2. Интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра, условия разрешимости этих уравнений.
3. Сжимаемость некоторой степени интегрального оператора Вольтерра с ограниченным ядром.
4. Использование теоремы Гильберта – Шмидта для нахождения решений интегрального уравнения, нахождение ядра резольвенты к интегральному оператору.
5. Сведение интегральных уравнений к системе линейных алгебраических уравнений к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

### **Тема 7. Пространства Соболева и обобщенные функции.**

*Цель и задачи изучения темы* – освоить методы решения задачи Штурма-Лиувилля.

1. Применение Теоремы Гильберта – Шмидта к решению уравнений в частных производных, задача Штурма-Лиувилля.
2. Теорема Лакса-Мильграна и ее применение к доказательству разрешимости уравнений в частных производных; пространства Соболева.
3. Характеризация обобщенных производных, теорема о компактном вложении  $H_1(a; b)$  в  $C[a; b]$ .
4. Пространство основных функций  $D$ , примеры основных функций, срезающие функции, плотность  $D(\Omega)$  в  $L_2(\Omega)$ , сходимость в пространстве  $D$ , непрерывность операторов дифференцирования, умножения и линейной замены переменной в  $D$ .
5. Пространство обобщенных функций (распределений)  $D'$ , регулярные и сингулярные обобщенные функции, сходимость в пространстве  $D'$ .
6. Непрерывность операторов дифференцирования и умножения (на бесконечно дифференцируемую функцию) в  $D'$ ; проблема умножения обобщенных функций, бесконечная дифференцируемость обобщенных функций, наличие первообразной у обобщенных функций, дифференциальные уравнения в  $D'$ .
7. Локальные свойства обобщенных функций, носитель обобщенных функций, свертка основной и обобщенной функций, свойства свертки.
8. Фундаментальное решение дифференциального оператора в частных производных с постоянными коэффициентами; пространства  $S$  быстро убывающих функций и  $S'$  медленно растущих распределений, пространства  $E$  и  $E'$ .

### **Тема 8. Элементы дифференциального исчисления в линейных нормированных пространствах.**

*Цель и задачи изучения темы* – освоить сильную и слабую дифференцируемость отображения в Банаховом пространстве.

1. Связь между сильной и слабой дифференцируемостью, формула конечных приращений.
2. необходимое условие локального экстремума вещественной дифференцируемой функции в Банаховом пространстве.
3. Классические задачи вариационного исчисления, уравнение Эйлера.
4. Полилинейные отображения, дифференцируемость, производные и дифференциалы высших порядков отображений в Банаховом пространстве, симметричность оператора второй производной.

5. Формула Тейлора, достаточные условия строгого локального экстремума вещественной дифференцируемой функции в Банаховом пространстве, условия Лежандра и Якоби.
6. Теорема о неявной функции, условный экстремум вещественной дифференцируемой функции в Банаховом пространстве и метод множителей Лагранжа.

#### ***Критерии формирования оценивания по результатам устного опроса***

Устный опрос является одним из основных способов учёта знаний обучающегося по дисциплине «Функциональный анализ». Развёрнутый ответ студента должен представлять собой связное, логически последовательное сообщение на заданную тему, показывать его умение применять изучаемые методы при решении практических задач.

В результате знания обучающегося оцениваются по ниже следующей шкале.

*Таблица 6. Шкала оценивания*

<b>Количество баллов</b>	<b>Критерии оценивания</b>
3	Обучающийся - полно излагает изученный материал, знает все формулы, применяемые методы и их точность; - понимает материал, может обосновать свои суждения, применить знания при решении практических задач для самостоятельного выполнения; - излагает материал последовательно и правильно с точки зрения норм литературного языка.
2	Обучающийся даёт ответ, удовлетворяющий тем же требованиям, что и для «3» баллов, но допускает несущественные ошибки, которые сам же исправляет, и некоторые недочёты в последовательности и оформлении излагаемого материала.
1	Обучающийся обнаруживает знание и понимание основного материала по данной теме, но: - излагает материал неполно и допускает неточности в определении понятий, знаний методов, их точности; - не умеет достаточно глубоко и доказательно обосновать свои суждения и применять методы; - излагает материал непоследовательно, допускает ошибки.
0	Обучающийся обнаруживает незнание большей части раздела изучаемого материала, допускает ошибки в формулировке и формулах, при оценке точности методов.

Баллы могут ставиться не только за единовременный ответ, но и за рассредоточенный во времени, т.е. за сумму ответов, данных студентом на протяжении занятия.

#### **5.1.2. Оценочные материалы для самостоятельной работы обучающегося (типовые задачи)** (контролируемые компетенции ПКС-1)

Перечень типовых задач для самостоятельной работы сформирован в соответствии с тематикой практических занятий по дисциплине «Функциональный анализ».

Самостоятельная работа оценивается степенью освоения вопросов для самостоятельного изучения (см. таблицу 6) и индивидуальным выполнением заданий к практическим занятиям.

#### ***Тема 1: Алгебра множеств. Счетные множества. Мощность множеств.***

1. Дано: а)  $A, B \subseteq \mathbb{Z}$ ,  $A = \{1; 2; 5; 7; 9; 11\}$ ,  $B = \{1; 4; 6; 7\}$ .

б)  $A, B \subseteq \mathbb{R}$ ,  $A = [-3; 7)$ ,  $B = [-4; 4]$ .

Найти:  $A \cap B$ ,  $A \cup B$ ,  $A \setminus B$ ,  $B \setminus A$ .

2. Дано: а)  $A, B \subseteq \mathbb{Z}$ ,  $A = \{1; 7; 9; 17\}$ ,  $B = \{-2; 1; 9; 10; 25\}$ .

б)  $A, B \subseteq \mathbb{R}$ ,  $A = [4; 9)$ ,  $B = [3; 7]$ .

Найти:  $A \cap B$ ,  $A \cup B$ ,  $A \setminus B$ ,  $B \setminus A$ .

3. Используя диаграммы Эйлера-Венна доказать тождества:

1)  $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ ;

2)  $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ ;

3)  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ;

4)  $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$ ;

5)  $(A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \setminus (B \cap C)$ ;

6)  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ;

7)  $(A \cap B) \setminus (A \cap C) = (A \cap B) \cap (A \setminus C)$ ;

**Тема 2: Метрические пространства. Неравенство Гельдера – Минковского.**

1. Доказать, что аксиомы метрического пространства эквивалентны следующим: 1)  $\rho(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$ ; 2)  $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(y, z) \forall x, y, z \in X$ .

2. Доказать, что для любых элементов  $x, y, z, t$  метрического пространства  $(X, \rho)$  справедливы неравенства: 1)  $|\rho(x, z) - \rho(y, z)| \leq \rho(x, y)$  (второе неравенство треугольника);

2)  $|\rho(x, z) - \rho(y, t)| \leq \rho(x, y) + \rho(z, t)$  (неравенство четырехугольника).

3. Показать, что в пространстве  $B_0$  неравенство треугольника выполняется в усиленной форме  $\rho(x, z) \leq \max\{\rho(x, y), \rho(y, z)\}$ .

4. Найти расстояние между элементами  $x_n = \frac{n+1}{n!} 2^{-n}$  и  $y_n = \frac{1}{n!} 2^{-n}$  в пространстве  $l_2$ .

5. Найти расстояние между элементами  $x(t) = \cos t$  и  $y(t) = 1$  в пространстве  $L_2[0, 2]$ .

**Тема 3: Принцип сжимающих отображений и его применения. Интегральные уравнения Вольтера и Фредгольма.**

1. Пусть  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — дифференцируемая функция. При каком условии на производную оно будет сжимающим?

2. Найти неподвижные точки оператора  $Ax(t) = \begin{cases} x''(t) + (\pi^2 + 1)x(t), \\ x(0) = x(\pi/2), \quad x'(\pi) = 1. \end{cases}$

3. Доказать существование единственного решения неявно заданных функций в  $C[0, 1]$ , если

$$y(x) + \frac{1}{9} e^x \arctg y(x) + f(x) = 0, \quad f(x) \in C[0, 1]$$

при некотором  $\lambda$ , если  $y_0(x) \equiv 0$ .

4. Найти неподвижные точки оператора  $Ax(t) = \begin{cases} x''(t) + 5x(t), \\ x(\pi/2) = 1, \quad x'(\pi) = x'(\pi) \end{cases}$

5. Является ли функция  $\varphi(x) = x e^x$  решением интегрального уравнения:

$$\varphi(x) = e^x \sin x + 2 \int_0^x \cos(x-t) \varphi(t) dt.$$

**Тема 4: Линейные топологические и нормированные пространства.**

1. Вычислить интеграл Лебега функции  $\varphi(x) = \begin{cases} \sqrt{x^3} - x^2, & \text{когда } x \text{ иррац. точка из } [0; 1], \\ x - \ln x, & \text{когда } x \text{ иррац. точка из } [1; e], \\ \arctg^2 x, & \text{когда } x \text{ рац. точка из } [0; e]. \end{cases}$
2. Вычислить интеграл Лебега функции  $\varphi(x) = \begin{cases} \sqrt{x^3} - x^2, & \text{когда } x \text{ иррац. точка из } [0; 1], \\ x - \ln x, & \text{когда } x \text{ иррац. точка из } [1; e], \\ \arctg^2 x, & \text{когда } x \text{ рац. точка из } [0; e]. \end{cases}$
3. Вычислить интеграл Лебега функции  $\varphi(x) = \begin{cases} x^2 - \cos x, & \text{если } x \text{ иррац. из } [0; \pi] \\ x^2 - x, & \text{когда } x \text{ иррац из } [\pi; 2\pi] \\ x^2 + x, & \text{когда } x \text{ иррац из } [0; 2\pi] \end{cases}$ .
4. Вычислить норму  $\|x(t)\|$  элемента  $x(t) = t^3 - 6t$  в пространстве  $L_1[-2; 2]$ .
5. Выяснить, можно ли в пространстве  $X$  под нормой элемента  $x \in X$  понимать число  $\|x\| = \max_{1 \leq k \leq n} (3^{-k} |x_k|)$ ?

**Тема 5: Линейные операторы и линейные функционалы в нормированном пространстве.**

1. Вычислить норму  $\|x(t)\|$  элемента  $x(t) = t^3 - 6t$  в пространстве  $L_1[-2; 2]$ .
2. Выяснить, можно ли в пространстве  $X$  под нормой элемента  $x \in X$  понимать число  $\|x\| = \max_{1 \leq k \leq n} (3^{-k} |x_k|)$ ?
3. Найти норму интегрального оператора с непрерывным ядром  $y(t) = \int_0^1 K(t, s)x(s)ds$ , рассматривая его как оператор, отображающий  $C[0, 1]$  в  $C[0, 1]$ .
4. Пусть  $X = C[0, 1]$  и  $Ax = \int_0^t x(\tau)d\tau$ , а  $A$ -ограниченный линейный оператор. Найти  $A^{-1}y$ .

**Тема 6: Интегральные уравнения.**

1. С помощью резольвенты найти решение интегрального уравнения  $\varphi(x) = \int_0^x e^{x-t}\varphi(t)dt + x$ .
2. Найти решение интегрального уравнения с вырожденным ядром:  $\varphi(x) = \lambda \int_0^1 (t^2 + 2tx)\varphi(t)dt + x^2$ .
3. Найти собственные значения и собственные функции интегрального уравнения:  $\varphi(x) = \lambda \int_0^1 (2xt^2 + 2tx^2)\varphi(t)dt$ .
4. Является ли функция  $\varphi(x) = xe^x$  решением интегрального уравнения:  $\varphi(x) = e^x \sin x + 2 \int_0^x \cos(x-t)\varphi(t)dt$ .
5. С помощью преобразования Лапласа найти решение интегрального уравнения  $\varphi(x) = 1 + x + \int_0^x (x-t)^2 \varphi(t)dt$ .
6. Решить интегральное уравнение Абеля:  $\int_0^x \frac{\varphi(t)dt}{\sqrt{x-t}} = x - \sqrt{x}$ .

**Тема 7: Пространства Соболева и обобщенные функции.**

1. Найти собственные значения и собственные функции интегрального уравнения:

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 (2xt^2 + 2tx^2) \varphi(t) dt.$$

2. Найти собственные значения и собственные функции интегрального уравнения:

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 (t^2 + 2tx) \varphi(t) dt + x^2.$$

**Тема 8: Элементы дифференциального исчисления в линейных нормированных пространствах.**

1. С помощью преобразования Лапласа, найти решение краевой задачи:

$$u_{tt} = u_{xx}, u(x, 0) = \sin x, u_t(x, 0) = 0, u(0, t) = 0, u(1, t) = 0.$$

2. Найти производную Фреше отображения

$$F: R^3 \rightarrow R^2: y_1 = tg(x_2) + ctg(x_3); \quad y_2 = \sin(x_1)\cos(x_2) - \sin(x_2)\cos(x_3) \text{ в точке } \left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{6}\right).$$

3. Свести к интегральному уравнению краевую задачу:  $y''(x) - y(x) = 0, y(0) = 1, y(1) = 0.$

**Методические рекомендации по решению задач.**

Приступая к решению задач, необходимо внимательно изучить теоретический материал по темам, разобрать приводимые в теоретическом материале каждой темы примеры. При выполнении заданий используются формулы и методы, представленные по каждой теме.

Цель заданий – сформировать навык решения практических прикладных задач численными методами, навык оценки точности полученного решения и анализа поведения ошибок, что является необходимым при применении численных методов.

**Критерии формирования оценивания по заданиям для самостоятельной работы студента (типовые задачи)**

Самостоятельное выполнение заданий на практических занятиях являются одним из основных способов учёта знаний обучающегося по дисциплине «Функциональный анализ».

В результате знания обучающегося оцениваются по ниже следующей шкале.

Таблица 7. Шкала оценивания

Количество баллов	Критерии оценивания
3	Обучающийся - показал глубокие знания материала по поставленным вопросам, грамотно, логично его излагает, свободно использует необходимые формулы при решении задач; - знает все формулы, применяемые методы и их точность; - может применять знания при решении прикладных задач для самостоятельного выполнения.
2	Обучающийся - даёт ответ, удовлетворяющий требованиям; - твердо знает материал, грамотно его излагает, не допускает существенных неточностей в процессе решения задач; - сам исправляет свои несущественные ошибки и некоторые недочёты.
1	Обучающийся обнаруживает знание и понимание основного материала по поставленным вопросам, но не усвоил его деталей, допускает отдельные неточности при решении задач.
0	Обучающийся допускает грубые ошибки в ответе на поставленные вопросы и при решении задач.

Баллы могут ставиться не только за единовременный ответ, но и за рассредоточенный во времени, т.е. за сумму ответов, данных студентом на протяжении занятия.

Перечень типовых задач для самостоятельной работы сформирован в соответствии с тематикой практических занятий по дисциплине.

Самостоятельная работа оценивается степенью освоения вопросов для самостоятельного изучения (см. таблицу 6) и индивидуальным выполнением заданий к практическим занятиям.

## 5.2. Оценочные материалы для рубежного контроля

*Рубежный контроль* проводится с целью определения качества освоения учебного материала в целом. Рубежный контроль осуществляется по более или менее самостоятельным разделам курса и проводится по окончании изучения материала в заранее установленное время.

В течение семестра проводится *три рубежных контрольных мероприятия по графику*.

Рубежный контроль проводится в виде коллоквиумов (или самостоятельных, контрольных) на практических занятиях, а также компьютерного тестирования.

Выполняемые работы хранятся на кафедре в течение учебного года и по требованию предоставляются в Управление контроля качества. На рубежные контрольные мероприятия выносятся программный материал (разделы) по дисциплине.

По каждой контрольной точке обязательным является компьютерное тестирование, которое проводится в группе вне рамок учебного расписания. Разработана и сертифицирована в установленном порядке база тестовых заданий по дисциплине. Она ежегодно обновляется и (или) дополняется на 15%.

Проведение бально-рейтинговых контрольных мероприятий для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья по дисциплине обеспечивается адаптированными контрольно-измерительными материалами и соответствующей технологией аттестации.

### 5.2.1. Оценочные материалы для коллоквиумов (контрольных работ)

*(контролируемые компетенции ПКС-1)*

Оценочные материалы и шкала оценивания для коллоквиумов приведены в п. 5.1.1, а оценочные материалы и шкала оценивания для контрольной работы – в п. 5.1.2.

### Образцы контрольных заданий

4. Понятие сходящихся последовательностей в топологическом пространстве. Сильная сходимость.
5. Доказать, что пересечение конечного числа топологических пространств – есть топологическое пространство.
6. Найти расстояние между элементами  $x_n = \frac{n+1}{n!} 2^{-n}$  и  $y_n = \frac{1}{n!} 2^{-n}$  в пространстве  $l_2$ .
7. Найти неподвижные точки оператора  $Ax(t) = \begin{cases} x''(t) + (\pi^2 + 1)x(t), \\ x(0) = x(1/2), \quad x'(0) = 1. \end{cases}$
8. Вычислить интеграл Лебега функции  $f(x) = \frac{(-1)^{[x]}}{[x] + 2}$  на интервале  $(0, +\infty)$ .
9. Найти расстояние между элементами  $x_n = \frac{n+4}{n} 2^{-n}$  и  $y_n = \frac{1}{n} 2^{2-n}$  в пространстве  $l_2$ .
10. Найти неподвижные точки оператора  $Ax(t) = \begin{cases} -\frac{1}{4\pi^2} x''(t), \\ x(0) = x(1), \quad x'(0) = 1. \end{cases}$
11. Вычислить интеграл Лебега функции  $\varphi(x) = \begin{cases} \sqrt{x^3} - x^2, & \text{когда } x \text{ иррац. точка из } [0; 1], \\ x - \ln x, & \text{когда } x \text{ иррац. точка из } [1; e], \\ \arctg^2 x, & \text{когда } x \text{ рац. точка из } [0; e] \end{cases}$

12. Найти неподвижные точки оператора  $Ax(t) = \begin{cases} x''(t) + 5x(t), \\ x(\pi/2) = 1, \quad x'(0) = x'(\pi) \end{cases}$
13. Вычислить интеграл Лебега функции  $f(x) = \frac{(-1)^{[x]}}{([x]+1)^2}$  на интервале  $(0, +\infty)$ .
14. Найти расстояние между элементами  $x(t) = ch(t)$  и  $y(t) = 1$  в пространстве  $L_2[0, 2]$ .
15. Выяснить, можно ли в пространстве  $X$  под нормой элемента  $x \in X$  понимать число  $\|x\| = \max_{1 \leq k \leq n} (3^{-k} |x_k|)$ ?
16. Найти неподвижные точки оператора  $Ax(t) = \begin{cases} x''(t) - 8x(t), \\ x(1/3) = 1, \quad x'(0) = 0 \end{cases}$
17. Вычислить интеграл Лебега функции  $\varphi(x) = \begin{cases} x^2 - \cos x, & \text{если } x \text{ иррац. из } [0; \pi] \\ x^2 - x, & \text{когда } x \text{ иррац из } [\pi; 2\pi] \\ x^2 + x, & \text{когда } x \text{ иррац из } [0; 2\pi] \end{cases}$ .
18. Вычислить норму  $\|x(t)\|$  элемента  $x(t) = t^3 - 6t$  в пространстве  $L_1[-2; 2]$ .
19. С помощью резольвенты найти решение интегрального уравнения  $\varphi(x) = \int_0^x e^{x-t} \varphi(t) dt + x$ .
20. Найти производную Фреше отображения  $F: R^3 \rightarrow R^2: y_1 = tg(x_2) + ctg(x_3); \quad y_2 = \sin(x_1)\cos(x_2) - \sin(x_2)\cos(x_3)$  в точке  $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{6}\right)$ .
21. Найти резольвенту ядра  $K(x, t) = \frac{x+1}{1+t}$  для интегрального уравнения Вольтера.
22. Свести к интегральному уравнению краевую задачу:  $y''(x) - y(x) = 0, y(0) = 1, y(1) = 0$ .
23. Найти решение интегрального уравнения с вырожденным ядром:  $\varphi(x) = \lambda \int_0^1 (t^2 + 2tx) \varphi(t) dt + x^2$ .
24. Найти собственные значения и собственные функции интегрального уравнения:  $\varphi(x) = \lambda \int_0^1 (2xt^2 + 2tx^2) \varphi(t) dt$ .
25. Найти преобразование Фурье функции  $f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & \text{при } x \in [-1; 2] \\ 0, & \text{при } x \notin [-1; 2] \end{cases}$ .
26. С помощью преобразования Лапласа найти решение интегрального уравнения  $\varphi(x) = x^2 + \int_0^x e^{x-t} \varphi(t) dt$ .
27. Является ли функция  $\varphi(x) = xe^x$  решением интегрального уравнения:  $\varphi(x) = e^x \sin x + 2 \int_0^x \cos(x-t) \varphi(t) dt$ .
28. С помощью преобразования Лапласа найти решение интегрального уравнения  $\varphi(x) = 1 + x + \int_0^x (x-t)^2 \varphi(t) dt$ .
29. Решить интегральное уравнение Абеля:  $\int_0^x \frac{\varphi(t) dt}{\sqrt{x-t}} = x - \sqrt{x}$ .
30. С помощью преобразования Лапласа, найти решение краевой задачи:  $u_{tt} = u_{xx}, u(x, 0) = \sin x, u_t(x, 0) = 0, u(0, t) = 0, u(1, t) = 0$ .
31. Найти резольвенту ядра  $K(x, t) = \frac{x^2}{t^2}$  для интегрального уравнения Вольтерра.

**Критерии формирования оценок по контрольным точкам (контрольные работы; коллоквиум)**

Таблица 8. Критерии оценивания

Процент правильных ответов	Количество баллов
более 91 %	10
81–90 %	9
71–80 %	8
61–70 %	7
51–60 %	6
41–50 %	5
31–40 %	4
21–30 %	3
11–20 %	2
6–10%	1
менее 6 %	0

**5.2.2. Оценочные материалы для компьютерного тестирования**  
(контролируемая компетенция ПКС-1)

Полный перечень **тестовых заданий** представлен в ЭОИС - <http://open.kbsu.ru/moodle/course/view.php?id=1200>

**Тест** – система стандартизированных заданий, позволяющая автоматизировать процедуру измерения уровня знаний и умений студента.

**Образцы тестовых заданий**

1. Множество всех целых чисел является:

- +: счётным
- : несчётным
- : конечным
- : пустым

2. Определенное правило или закон, по которому каждому натуральному числу  $n \in N$  ставится в соответствие определенное действительное число  $x_n \in R$ , называется:

- : функционалом
- : функцией
- : оператором
- +: последовательностью

3. Пересечение любого конечного числа открытых множеств есть:

- : замкнутое множество
- +: открытое множество
- : пустое множество
- : пустое множество

4. Пустое множество имеет меру:

- : 1
- :  $\frac{1}{2}$
- : 2
- +: 0

5. Мерой интервала  $(a, b)$  является:

- :  $a + b$



$$-: \frac{a+b}{2}$$

$$+: b - a$$

$$-: \frac{b-a}{2}$$

6. Замкнутым шаром радиуса  $r$  с центром в точке  $x_0$  в метрическом пространстве  $(X, \rho)$  называется множество:

$$-: \{x \in X : \rho(x, x_0) > r\}$$

$$+: \{x \in X : \rho(x, x_0) \leq r\}$$

$$-: \{x \in X : \rho(x, x_0) < r\}$$

$$-: \{x \in X : \rho(x, x_0) \geq r\}$$

7. Верно равенство:

$$-: A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \setminus C$$

$$-: A \Delta (B \Delta C) = A \Delta C$$

$$-: A \Delta (B \Delta C) = A \Delta B$$

$$+: A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$$

8. Верно равенство:

$$-: A \Delta A = A \cup B$$

$$+: A \Delta A = \emptyset$$

$$-: A \Delta B = A \cap B$$

$$-: A \Delta A = 2A$$

9. Функцией взаимно однозначно отображающей отрезок  $[-10; 10]$  на отрезок  $[75; 100]$  является функция:

$$+: y = 12,5x + 87,5$$

$$-: y = 12,5x + 5$$

$$-: y = 12,5x - 55$$

$$-: y = 12,5x - 75$$

10. Функцией, взаимно однозначно отображающей отрезок  $[0; 1]$  на отрезок  $[a; b]$  является функция:

$$-: y = ax + b$$

$$+: y = (b - a) \cdot x + a$$

$$-: y = (a - b) \cdot x$$

$$-: y = (a + b) \cdot x$$

11. Евклидово  $n$ -мерное пространство  $R^n$  носителем которого является множество всевозможных упорядоченных наборов из  $n$  чисел является метрическим пространством, если за расстояние принять:

$$+: \rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

$$-: \rho(x, y) = x_i + y_i$$

$$-: \rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i^2 - y_i^2)}$$

$$-: \rho(x, y) = (x_i^3 - y_i^3)^{1/3}$$

12. Пространство  $X$  будет метрическим, если:

$$+: \rho(x, y) = \int_0^1 \sin t |x(t) - y(t)| dt$$

$$-: \rho(x, y) = \int_0^1 |\sin x(t) - \sin y(t)| dt :$$

$$-: \rho(x, y) = \int_0^1 |\sqrt{x(t)} - \sqrt{y(t)}| dt$$

$$-: \rho(x, y) = \int_0^1 \sin x(t) |x(t) - y(t)| dt$$

13. Расстояние между элементами  $\sin t$  и  $\cos^2 t$  в метрическом пространстве  $C\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  равно:

$$-: 0$$

$$+: 1$$

$$-: 1,5$$

$$-: 2$$

14. Расстояние между элементами  $\sin t$  и  $\cos t$  в метрическом пространстве  $L_2\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  равно:

$$-: 0$$

$$-: 1$$

$$-: \pi$$

$$+: \sqrt{\pi}$$

15. Бесконечная система линейных алгебраических уравнений  $x_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j + b_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$

имеет единственное решение  $x = (x_1, x_2, \dots) \in l_2$  для любой последовательности  $b = (b_1, b_2, \dots) \in l_2$ , если выполнено условие:

$$+: \sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 < 1$$

$$-: \sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 = 1$$

$$-: \sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 > 1$$

$$-: \sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 \geq 1$$

16. Неподвижными точками отображения  $f(x) = x^2 - 4x + 4$  будут точки:

$$-: 2$$

$$+: 1; 4$$

$$-: -1; 1$$

$$-: -\sqrt{3}; 2$$

17. Пусть  $A_1$  и  $A_2$  - два ограниченных открытых множества. Если  $A_1 \subset A_2$ , то:

$$+: \mu(A_1) \leq \mu(A_2)$$

$$-: \mu(A_1) = \mu(A_2)$$

$$-: \mu(A_1) > \mu(A_2)$$

$$-: \mu(A_1) \geq \mu(A_2)$$

18. Мера множества точек отрезка  $[0; 1]$ , в разложении которых в бесконечную десятичную дробь присутствуют все цифры от 1 до 9 равна:

+: 0

-: 0,5

-: 0,75

-: 1

19. Интеграл Лебега на отрезке  $[0; 1]$  от функции

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{в рациональных точках} \\ -x^2, & \text{в иррациональных точках} \end{cases} \quad \text{равен:}$$

-: 0

-:  $\frac{2}{3}$

-:  $\frac{1}{3}$

+:  $-\frac{1}{3}$

20. Интеграл Лебега на множестве  $[0; 1]$  от функции  $f(x)$  равной  $x^3 - 1$  во всех точках пересечения канторова множества и некоторого множества  $E$  и равной  $x$  в остальных точках отрезка  $[0; 1]$  равен:

-: 0

-: -0,75

+: 0,5

-: 1

21. Вычислить  $\int_{[0;1]} f(x) d\mu$ , если  $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{для } x \in D \\ \sqrt{x}, & \text{для } x \notin D \end{cases}$  где  $D$  – канторово множество.

-: 0

-: 1

-: 1,5

+:  $\frac{2}{3}$

22. Числовая прямая образует нормированное пространство, если в качестве расстояния принять:

-:  $\|x\| = x$

-:  $\|x\| = x^{1/2}$

-:  $\|x\| = \sqrt{x^3}$

+:  $\|x\| = |x|$

23. В пространстве сходящихся со степенью  $p$  последовательностей  $\ell_p$  норма определяется по формуле:

$$-: \|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (x_k)^2}$$

$$-: \|x\| = \sqrt[3]{\sum_{k=1}^{\infty} x_k}$$

$$+: \|x\| = \left( \sum_{k=1}^{\infty} (x_k)^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\therefore \|x\| = \left( \sum_{k=1}^{\infty} (x_k)^{\frac{1}{p}} \right)^p$$

24. В пространстве  $l_2$  нормой элемента  $x_n = \frac{1}{2^{n-1}}$  является число:

-: 2

-: 0,5

+:  $\frac{2}{\sqrt{3}}$

-:  $\frac{1}{\sqrt{3}}$

25. Норма элемента  $x(t) = t^2 - 4t$  в пространстве  $L_1[0, 5]$  равна:

+: 13

-:  $\frac{50}{3}$

-:  $-\frac{50}{3}$

-: 26

26. Для того чтобы линейный функционал  $F(x)$  был непрерывным на  $E$ , необходимо и достаточно, чтобы существовала такая окрестность нуля на множестве  $E$ , на котором функционал  $F(x)$  ###

+: ограничен

27. Точную верхнюю грань значений  $|F(x)|$  на единичном шаре пространства  $E$ , то есть число  $\sup_{\|x\| \leq 1} |F(x)|$ , называется ### функционала  $F(x)$

+: нормой

28. Дополнение к резольвентному множеству  $\rho(A)$  в комплексной плоскости называется ### оператора

+: спектром

29. Всякое резольвентное множество

-: замкнутое множество;

+: открытое множество;

-: пустое множество;

-: несчетное множество.

30. Собственными значениями линейного дифференциального оператора

$$Ax(t) = \begin{cases} x''(t) \\ x(0) = x(\pi/2) = 0 \end{cases} \text{ являются числа:}$$

-:  $\lambda_n = -n^2, n \in N$

-:  $\lambda_n = -(2n)^2, n \in N$

+:  $\lambda_n = -4n^2, n \in N$

-:  $\lambda_n = n^2 / 2, n \in N$

31. Сопреженным к интегральному оператору  $Ax(t) = \int_0^1 (s-t)x(s)ds$  в пространстве  $L_2[0;1]$

будет оператор

$$+: A^* y(t) = \int_0^1 (t-s) y(s) ds$$

$$-: A^* y(t) = \int_0^1 (s-t) y(s) ds$$

$$-: A^* y(t) = \int_0^1 (t+s) y(s) ds$$

$$-: A^* y(t) = \int_0^1 (t \cdot s) y(s) ds$$

32. В пространстве  $l_2$  множество точек  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ , подчиненных условиям  $|x_1| \leq 1, |x_2| \leq \frac{1}{4}, |x_3| \leq \frac{1}{16}, \dots, |x_n| \leq \frac{1}{4^n}, \dots$  является ###

+: вполне ограниченным

33. В пространстве  $l_2$  множество точек  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ , подчиненных условиям  $|x_1| \leq 1, |x_2| \leq 2, |x_3| \leq 4, \dots, |x_n| \leq 2^n, \dots$  является ###

+: неограниченным

34. Будет ли оператор  $Ax(t) = t^3 x(0) - t x(1)$  компактным?

+: да

-: нет

35. Будет ли оператор  $Ax(t) = t^2 x(0) - t^4 x(1)$  компактным?

+: да

-: нет

36. В пространстве  $l_2$  положим  $(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k y_k$ , где  $\lambda_k \in R, 0 < \lambda_k < 1$ . Будет ли данное пространство предгильбертовым?

+: да

-: нет

37. В пространстве  $L_2[0;1]$  положим  $(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{x_k} x_k y_k$ . Будет ли данное пространство предгильбертовым?

-: да

+: нет

38. Скалярное произведение элементов  $x = (7; 4; 1; -2)$  и  $y = (-1; 2; 5; 8)$  в пространстве  $R^4$  равно:

+: -10

-: 10

-: -20

-: 20

39. Если  $(f_n, \varphi) \rightarrow (f, \varphi)$  то говорят что последовательность обобщенных функций  $\{f_n\}$  ### к функции  $f$

+: сходится

40. Обобщенная производная функции  $f(x) = \theta(-x) \sin x$  равна:

$$+: f'(x) = \theta(-x) \cos x$$

$$\therefore f'(x) = \theta(-x)\cos x - \delta(x)$$

$$\therefore f'(x) = -\theta(-x)\cos x$$

$$\therefore f'(x) = -\theta(-x)\cos x - \delta(x)$$

41. Первое приближение решения интегрального уравнения  $\varphi(x) = \int_0^1 t \varphi(t) dt + x^2$ ,  $\varphi_0(x) = x^2$ ,

будет равна

$$\therefore \varphi_1(x) = \frac{3x^2}{2}$$

$$\therefore \varphi_1(x) = \frac{x^2}{3}$$

$$+ : \varphi_1(x) = \frac{1}{4} + x^2$$

$$\therefore \varphi_1(x) = \frac{4x^2}{3}$$

42. Второе приближение решения интегрального уравнения  $\varphi(x) = \int_0^1 t^2 \varphi(t) dt + 1$ ,  $\varphi_0(x) = 1$ , будет

равна

$$+ : \varphi_2(x) = \frac{13}{9}$$

$$\therefore \varphi_2(x) = \frac{4}{9}$$

$$\therefore \varphi_2(x) = \frac{10}{9}$$

$$\therefore \varphi_2(x) = \frac{1}{9}$$

43. Решением интегрального уравнения с вырожденным ядром

$$y(x) - \lambda \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} t g t y(t) dt = ctgx \text{ является:}$$

$$+ : \frac{\pi}{2} \lambda + ctgx;$$

$$- : \frac{\lambda}{2} + t g x;$$

$$- : \frac{\pi + 1}{2} + ctgx;$$

$$- : \pi ctgx + t g x.$$

44. Характеристическими числами и собственными функциями однородного интегрального уравнения с вырожденным ядром

$$y(x) - \lambda \int_0^{\pi} \cos(x+t) y(t) dt = 0 \text{ является:}$$

$$- : \frac{2}{3\pi}, \frac{4}{\pi}, \sin x, -\cos x;$$

$$\begin{aligned}
+ : & -\frac{2}{\pi}, \frac{2}{\pi}, \sin x, \cos x; \\
- : & -\frac{3}{\pi}, \frac{3}{\pi}, -\sin x, -\cos x; \\
- : & -\frac{4}{\pi}, \frac{\pi}{4}, \sin 2x, \cos 2x.
\end{aligned}$$

45. Функцией Грина краевой задачи  $y''' = 0$ ;  $y(0) = y(1) = 0$ ,  $y'(0) = y'(1)$  является:

$$\begin{aligned}
- : G(x, \xi) &= \begin{cases} \frac{x(x-\xi)(\xi+1)}{2}, & 0 \leq x \leq \xi, \\ \frac{\xi(\xi-x)(x-1)}{2}, & \xi \leq x \leq 1; \end{cases} \\
- : G(x, \xi) &= \begin{cases} \frac{x(x+\xi)(\xi-1)}{2}, & 0 \leq x \leq \xi, \\ \frac{\xi(\xi+x)(x+1)}{2}, & \xi \leq x \leq 1; \end{cases} \\
+ : G(x, \xi) &= \begin{cases} \frac{x(x-\xi)(\xi-1)}{2}, & 0 \leq x \leq \xi, \\ -\frac{\xi(\xi-x)(x-1)}{2}, & \xi \leq x \leq 1; \end{cases} \\
- : G(x, \xi) &= \begin{cases} \frac{x(x+\xi)(\xi+1)}{2}, & 0 \leq x \leq \xi, \\ -\frac{\xi(\xi-x)(x+1)}{2}, & \xi \leq x \leq 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

46. Резольвентой ядра является:

$$K(x, t) = x^2 t^2, \quad a = -1, \quad b = 1$$

является:

$$\begin{aligned}
-1 : R(x, t; \lambda) &= -\frac{5x^2 t^2}{5-2\lambda}; \quad |\lambda| > \\
-2 : R(x, t; \lambda) &= -\frac{5xt^2}{5-2\lambda}; \quad |\lambda| < \frac{5}{2}; \\
+3 : R(x, t; \lambda) &= \frac{5x^2 t^2}{5-2\lambda}; \quad |\lambda| < \frac{5}{2}; \\
-4 : R(x, t; \lambda) &= \frac{5x^2 t}{5-2\lambda}; \quad |\lambda| > \frac{5}{2}.
\end{aligned}$$

47. Решением интегрального уравнения Абеля  $\int_0^x \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^t} = x^2$  является функция

$$\begin{aligned}
+ : \varphi(x) &= \frac{16\sqrt{2}}{5\pi} \cdot x^{5/4} \\
- : \varphi(x) &= \frac{8\sqrt{2}}{5\pi} \cdot x^{3/4} \\
- : \varphi(x) &= \frac{4\sqrt{2}}{5\pi} \cdot x^{1/2}
\end{aligned}$$

$$\therefore \varphi(x) = \frac{4\sqrt{3}}{5\pi} \cdot x^{1/3}$$

48. Производная Фреше отображения  $F: R^4 \rightarrow R^2$ ,  $y_1 = 1 + x_3^2 + x_4^4$ ,  $y_2 = x_1^{-1} + x_2^{-2} + x_4$  равна

$$+: F'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2x_3 & 4x_4^3 \\ -\frac{1}{x_1^2} & -\frac{2}{x_2^3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-: F'(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2x_3 & 4x_4^3 \\ -\frac{1}{x_1^2} & -\frac{2}{x_2^3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-: F'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{2}{x_2^3} & 4x_4^3 \\ -\frac{1}{x_1^2} & 2x_3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-: F'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2x_3 & -\frac{1}{x_1^2} \\ 4x_4^3 & -\frac{2}{x_2^3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

49. Функция  $y = \begin{cases} -e^x \text{ при } x \leq 0, \\ e^{-x} \text{ при } x > 0, \end{cases}$  представленная интегралом Фурье имеет вид:

$$-: \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\alpha \cos \alpha x d\alpha}{1 + \alpha^2}$$

$$-: \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x d\alpha}{1 + \alpha}$$

$$+: \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\alpha \sin \alpha x d\alpha}{1 + \alpha^2}$$

$$-: \frac{1,2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\cos(2k-1)\pi x}{2k-1}$$

50. Сверткой функции  $a(t)$  и  $b(t)$  действительного переменного  $t$  называется функция  $c(t)$ , определяемое равенством:

$$+: c(t) = \int_0^t a(t-\tau)b(\tau)d\tau;$$

$$-: c(t) = \int_0^t a(t-\tau)d\tau;$$

$$-: c(t) = \int_0^t ab(\tau)d\tau;$$

$$-: c(t) = \int_0^t b(\tau)d\tau.$$

51. Преобразование Лапласа тригонометрической функции

$$f(t) = \sin t$$

имеет вид:

$$+: \mathcal{L}(\sin t) = \frac{1}{p^2 + 1};$$



$$\therefore \mathcal{L}(\sin t) = \frac{p}{p^2+1};$$

$$\therefore \mathcal{L}(\sin t) = \frac{1}{p^2};$$

$$\therefore \mathcal{L}(\sin t) = \frac{1}{p}.$$

52. С помощью преобразования Лапласа найти решение о.д.у.

$$y''' - y'' - 6y' = 0$$

$$y(0) = 15, y'(0) = 2, y''(0) = 56 \text{ является:}$$

$$+: y(t) = 6 + 5e^{-t^2} + 4e^{3t};$$

$$-: y(t) = 6 + 5e^{-t^2};$$

$$-: y(t) = 5e^{-t^2} + 4e^{3t};$$

$$-: y(t) = 6 + 4e^{3t}.$$

53. Интегральное уравнение Вольтера второго рода

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x K(x-t)\varphi(t)dt \text{ ядро, которого зависит лишь от разности } x-t,$$

называется интегральным уравнением типа ###.

+: свертки

$$54. \text{ Преобразование Лапласа, имеющее вид } F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)K(pt)dt$$

называется ### функции f(t).

+: k-преобразованием.

В результате знания обучающегося оцениваются по ниже следующей шкале.

Таблица 9. Шкала оценивания

Критерии оценивания, процент правильных ответов	Количество баллов
более 85 % правильных ответов на предложенные тестовые вопросы	5
71–84 % правильных ответов на предложенные тестовые вопросы	4
41–70 % правильных ответов на предложенные тестовые вопросы	3
21–40 % правильных ответов на предложенные тестовые вопросы	2
10–20 % правильных ответов на предложенные тестовые вопросы	1
менее 10 % правильных ответов на предложенные тестовые вопросы	0

### 5.3. Оценочные материалы для промежуточной аттестации

Целью промежуточной аттестации по дисциплине является оценка качества освоения дисциплины обучающимися.

Оценочные материалы для проведения промежуточной аттестации по дисциплине включают в себя:

- перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения дисциплины;

- описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания;

- типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений и навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы;

- методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций.

Для каждого результата обучения определяются показатели и критерии оценивания сформированных компетенций на различных этапах их формирования, шкалы и процедуры оценивания. При составлении оценочных материалов основываются на компетентных принципах. Они содержат комплексные средства оценки, объективно отражающие качество подготовки специалиста по данной дисциплине.

Промежуточная аттестация предназначена для объективного подтверждения и оценивания достигнутых результатов обучения после завершения изучения дисциплины.

*Промежуточная аттестация* завершает изучение дисциплины и помогает оценить совокупности знаний и умений, а также формирование определенных профессиональных компетенций. Она служит основным средством обеспечения в учебном процессе «обратной связи» между преподавателем и обучающимся, необходимой для стимулирования работы обучающихся и совершенствования методики преподавания учебных дисциплин.

Оценивание знаний, умений и навыков носит комплексный, системный характер – с учетом как места дисциплины в структуре образовательной программы, так и содержательных и смысловых внутренних связей. Связи формируемых компетенций с разделами и темами дисциплины обеспечивают возможность реализации для текущего контроля наиболее подходящих оценочных средств.

Для успешной промежуточной аттестации студент должен:

- показать полные и глубокие знания материала;
- уметь применять полученные знания для решения практических задач и быть способным анализировать проблемы, формулировать выводы;
- владеть необходимыми навыками для применения полученных знаний и умений в своей профессиональной деятельности.

Для получения зачёта студенту необходимо иметь не менее 61 балла. Для допуска к зачёту студент должен по итогам текущего и рубежного контроля успеваемости набрать число баллов не менее 36. На зачёте он может повысить сумму баллов до 61 (не более), необходимых для получения зачёта. Если по итогам текущего и рубежного контроля успеваемости студент набрал 61 и более баллов, то ему может выставляться зачёт без сдачи.

#### ***Перечень вопросов, выносимых на зачёт*** ***(контролируемая компетенция ПКС-1):***

1. Аксиомы метрического пространства.
2. Неравенства Коши–Буняковского, Минковского, Юнга, Гёлдера.
3. Полные метрические пространства.
4. Пополнение метрических пространств.
5. Принцип сжимающих отображений.
6. Метод последовательных приближений.
7. Метод последовательных приближений для системы линейных алгебраических уравнений.
8. Теорема существования и единственности для задачи Коши.
9. Теорема существования и единственности для интегрального уравнения Вольтерра.
10. Теорема существования и единственности для интегрального уравнения Фредгольма.
11. Топологические пространства, основные определения.
12. Сравнение топологий.
13. Сепарабельные топологические пространства, основные определения.
14. Непрерывные отображения.
15. Аксиома отделимости Хаусдорфовые пространства.
16. Понятия компактности.
17. Компактность в метрических пространствах.
18. Предкомпактные множества.

19. Теория меры. Кольцо и алгебра множеств. Элементарные множества.
20. Лебегова мера плоских множеств.
21. Общее понятие меры.
22. Измеримые функции. Действия над измеримыми функциями.
23. Сходимость по мере.
24. Интеграл Лебега. Простые функции.
25. Свойства интеграла Лебега.
26. Сравнение интеграла Лебега с интегралом Римана.
27. Теорема Фубини.
28. Линейные пространства. Определения и примеры.
29. Линейные функционалы.
30. Выпуклые функционалы.
31. Нормированные пространства.
32. Евклидовы пространства.
33. Существование ортогональных базисов, ортогонализация.
34. Неравенства Бесселя.
35. Полные евклидовы пространства. Теорема Рисса–Фишера.
36. Гильбертово пространство.
37. Непрерывные линейные функционалы в линейных нормированных пространствах.
38. Определение сопряженного пространства.
39. Сильная топология в сопряженном пространстве.
40. Слабая топология и слабая сходимость.
41. Обобщенные функции.
42. Действия над обобщенными функциями.
43. Дифференциальные уравнения в классе обобщенных функций.
44. Линейные операторы, определения и примеры.
45. Непрерывность и ограниченность.
46. Сумма и произведение операторов.
47. Обратный оператор, обратимость.
48. Сопряженные операторы.
49. Самосопряженные операторы.
50. Спектр оператора.
51. Резольвента.
52. Компактные операторы.
53. Неограниченные операторы в нормированных пространствах.

В результате знания обучающегося оцениваются по ниже следующей шкале.

*Таблица 10. Критерии оценивания*

Сумма баллов текущего и рубежного контроля	Сумма баллов на зачете	Общая сумма баллов	Оценка
$\geq 61$	-	61	зачет (без сдачи)
36-60	0	36-60	незачет
36-60	25-1	61	зачет
$< 36$	-	-	недопуск

#### ***Перечень вопросов на экзамен***

*(контролируемая компетенция ПКС-1):*

1. Метрические пространства. Примеры метрических пространств.
2. Неравенства Гельдера и Минковского.
3. Интегральные неравенства Гельдера и Минковского.
4. Непрерывные отображения метрических пространств. Примеры.
5. Измеримые функции. Интеграл Лебега от измеримой функции. Свойства.

6. Полные метрические пространства. Теорема о вложенных шарах (с доказательством).
7. Банаховы пространства. Теорема Бера (с доказательством).
8. Принцип сжимающих отображений (с доказательством). Применения принципа сжимающих отображений.
9. Понятие линейного пространства. Примеры линейных пространств.
10. Нормированные пространства. Примеры нормированных пространств.
11. Нормированные пространства. Подпространства нормированных пространств.
12. Компактные множества. Примеры компактных множеств.
13. Компактные множества. Теорема Арцелла (доказательство необходимости).
14. Компактные множества. Теорема Арцелла (доказательство достаточности).
15. Критерий компактности в пространстве  $L_p[a, b]$ . Теорема Рисса (с доказательством).
16. Непрерывные линейные функционалы. Примеры.
17. Критерий непрерывности линейных функционалов (с доказательством).
18. Линейные функционалы в нормированных пространствах.
19. Сопряженное пространство. Общий вид линейных функционалов в Банаховых пространствах.
20. Теорема о полноте сопряженных пространств. Рефлексивные пространства.
21. Сопряженные операторы. Примеры сопряженных операторов. Самосопряженные операторы.
22. Обратные операторы. Свойства обратных операторов.
23. Теорема Банаха об обратном операторе (с доказательством).
24. Понятие спектра линейного оператора в Банаховом пространстве. Резольвента.
25. Резольвента оператора. Аналитические свойства резольвенты.
26. Теорема о спектре сопряженного оператора (с доказательством).
27. Компактные операторы. Свойства. Примеры.
28. Понятие о локально выпуклом пространстве. Функционал Минковского.
29. Обобщенные функции. Регулярные и сингулярные обобщенные функции. Носитель обобщенной функции.
30. Понятие обобщенных функций и обобщенных производных.
31. Гильбертовы пространства. Примеры гильбертовых пространств.
32. Ортогональность в гильбертовом пространстве. Ортогональные и ортонормированные системы.
33. Общий вид линейных функционалов в гильбертовом пространстве.
34. Сопряженные, самосопряженные и унитарные операторы в гильбертовых пространствах.
35. Спектр самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве.
36. Инвариантные подпространства в гильбертовых пространствах. Примеры. Свойства.
37. Операторы с чисто точечным спектром. Теорема о связи с собственными значениями (с доказательством).
38. Спектральное разложение самосопряженных операторов.
39. Положительные и положительно определенные операторы. Примеры. Свойства.
40. Разложение функции, заданной на  $[-\pi, \pi]$  в тригонометрический ряд Фурье. Условие Дирихле. Признак Дирихле.
41. Достаточные условия сходимости тригонометрического ряда Фурье функции, заданной на  $[-\pi, \pi]$ .
42. Преобразование Лапласа и его свойства (одно свойство с доказательством).
43. Применение преобразования Лапласа к решению задачи Коши для ОДУ.
44. Обобщенные функции медленного роста. Преобразование Фурье обобщенной функции.
45. Понятие интегральных уравнений. Задачи, приводящие к понятию интегральные уравнения.
46. Интегральные уравнения Фредгольма второго рода. Представление решения через резольвенту ядра.
47. Интегральные уравнения с вырожденным ядром. Методика решения интегральных уравнений с вырожденным ядром.

48. Интегральные уравнения с симметрическим ядром. Сопряженные интегральные уравнения. Операторы Гильберта–Шмидта.
49. Теоремы Фредгольма. Альтернатива Фредгольма (с доказательством).
50. Интегральные уравнения Вольтерра второго рода. Представление решения через резольвенту.
51. Интегральное уравнение со слабой особенностью. Уравнение Абеля. Методика решения уравнения Абеля.

В экзаменационные билеты включаются два теоретических вопроса из различных разделов программы и одна задача.

***Критерии формирования оценок по промежуточной аттестации:***

**«отлично»** (30 баллов) – получают обучающиеся, которые свободно ориентируются в материале и отвечают без затруднений. Обучающийся способен к выполнению сложных заданий, постановке целей и выборе путей их реализации. Работа выполнена полностью без ошибок, решено 100% задач;

**«хорошо»** (24 балла) – получают обучающиеся, которые относительно полно ориентируются в материале, отвечают без затруднений, допускают незначительное количество ошибок. Обучающийся способен к выполнению сложных заданий. Работа выполнена полностью, но имеются не более одной негрубой ошибки и одного недочета, не более трех недочетов. Допускаются незначительные неточности при решении задач, решено 70% задач;

**«удовлетворительно»** (18 баллов) – получают обучающиеся, у которых недостаточно высок уровень владения материалом. В процессе ответа на экзамене допускаются ошибки и затруднения при изложении материала. Обучающийся правильно выполнил не менее 2/3 всей работы или допустил не более одной грубой ошибки и двух недочетов, не более одной грубой и одной негрубой ошибки, не более трех негрубых ошибок, одной негрубой. Обучающийся затрудняется с правильной оценкой предложенной задачи, дает неполный ответ, решено 55% задач;

**«неудовлетворительно»** (14 баллов) – получают обучающиеся, которые допускают значительные ошибки. Обучающийся имеет лишь начальную степень ориентации в материале. В работе число ошибок и недочетов превысило норму для оценки 3 или правильно выполнено менее 2/3 всей работы. Обучающийся дает неверную оценку ситуации, решено менее 50% задач.

***Критерии оценки.***

Уровень знаний определяется оценками **«отлично»**, **«хорошо»**, **«удовлетворительно»**, **«неудовлетворительно»**.

1. Оценка **«отлично»** - студент показывает полные и глубокие знания программного материала, логично и аргументировано отвечает на поставленный вопрос, а также дополнительные вопросы, показывает высокий уровень теоретических знаний.

2. Оценка **«хорошо»** - студент показывает глубокие знания программного материала, грамотно его излагает, достаточно полно отвечает на поставленный вопрос и дополнительные вопросы, умело формулирует выводы. В тоже время при ответе допускает несущественные погрешности.

3. Оценка **«удовлетворительно»** - студент показывает достаточные, но не глубокие знания программного материала; при ответе не допускает грубых ошибок или противоречий, однако в формулировании ответа отсутствует должная связь между анализом, аргументацией и выводами. Для получения правильного ответа требуется уточняющие вопросы.

4. Оценка **«неудовлетворительно»** - студент показывает недостаточные знания программного материала, не способен аргументированно и последовательно его излагать, допускаются грубые ошибки в ответах, неправильно отвечает на поставленный вопрос или затрудняется с ответом.

**6. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

Минимальная сумма – 100 баллов, набираемая студентом по дисциплине включает две составляющие:

– *первая составляющая* – оценка регулярности, своевременности и качества выполнения студентом учебной работы по изучению дисциплины в течение периода изучения дисциплины (семестра, или нескольких семестров) (сумма – не более 70 баллов). Баллы, характеризующие успеваемость студента по дисциплине, набираются им в течение всего периода обучения за изучение отдельных тем и выполнение отдельных видов работ.

– *вторая составляющая* – оценка знаний студента по результатам промежуточной аттестации (не более 30 баллов).

Критерием оценки уровня сформированности компетенций в рамках учебной дисциплины «Функциональный анализ» V семестре является экзамен, в VI семестре экзамен.

**Целью промежуточных аттестаций** по дисциплине является оценка качества освоения дисциплины обучающимися. По дисциплине «Функциональный анализ» учебным планом предусмотрены форма промежуточной аттестации – экзамен в V, экзамен в VI семестрах. Проводится комплексная проверка обучающихся на определение степени овладения знаниями, умениями и навыками, полученными на занятиях, а также путём самостоятельной работы.

Полностью, без пробелов, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы. Все предусмотренные программой обучения учебные задания выполнены, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к максимальному. На экзамене студент демонстрирует глубокие знания предусмотренного программой материала, умеет четко, лаконично и логически последовательно отвечать на поставленные вопросы.

**Оценка «хорошо» – от 81 до 90 баллов** – теоретическое содержание курса освоено, необходимые практические навыки работы сформированы, выполненные учебные задания содержат незначительные ошибки. На экзамене студент демонстрирует твердые знания основного (программного) материала, умеет четко, грамотно, без существенных неточностей отвечать на поставленные вопросы.

**Оценка «удовлетворительно» – от 61 до 80 баллов** – теоретическое содержание курса освоено не полностью, необходимые практические навыки работы сформированы частично, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. На экзамене студент демонстрирует знание только основного материала, ответы содержат неточности, слабо аргументированы, нарушена последовательность изложения материала.

**Оценка «неудовлетворительно» – от 36 до 60 баллов** – теоретическое содержание курса не освоено, необходимые практические навыки работы не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки, дополнительная самостоятельная работа над материалом курса не приведет к существенному повышению качества выполнения учебных заданий. На экзамене студент демонстрирует незнание значительной части программного материала, существенные ошибки в ответах на вопросы, неумение ориентироваться в материале, незнание основных понятий дисциплины.

Для получения зачета, которым заканчивается изучение дисциплины в семестре, студенту необходимо иметь не менее 61 балла. Если по итогам текущего и рубежного контроля успеваемости студент набрал число баллов в пределах от 36 до 61, то он допускается к сдаче зачета. По итогам зачета он может повысить сумму баллов до 61 (не более), необходимых для получения зачета.

Оценка **«зачтено»** - уровень знаний студента соответствует требованиям:

– студент свободно ориентируется в материале и отвечает без затруднений. Обучающийся способен к выполнению сложных заданий, постановке целей и выборе путей их реализации. Работа выполнена полностью без ошибок, решено 100% задач;

– относительно полно ориентируется в материале, отвечает без затруднений, допускает незначительное количество ошибок. Обучающийся способен к выполнению сложных заданий. Работа выполнена полностью, но имеются не более одной негрубой ошибки и одного недочета, не более трех недочетов. Допускаются незначительные неточности при решении задач, решено 70% задач;

– В процессе ответа допускаются ошибки и затруднения при изложении материала. Обучающийся правильно выполнил не менее 2/3 всей работы или допустил не более одной

грубой ошибки и двух недочетов, не более одной грубой и одной негрубой ошибки, не более трех негрубых ошибок, одной негрубой. Обучающийся затрудняется с правильной оценкой предложенной задачи, дает неполный ответ, решено 55% задач;

Оценки «не зачтено» - студент показывает недостаточные знания программного материала, не способен аргументированно и последовательно его излагать, допускаются грубые ошибки в ответах, неправильно отвечает на поставленный вопрос или затрудняется с ответом.

Типовые задания, обеспечивающие формирование компетенций *ПКС-1* представлены в таблице 11.

Таблица 11. Результаты освоения учебной дисциплины, подлежащие проверке

Результаты обучения (компетенции)	Основные показатели оценки результатов обучения	Индикаторы достижения компетенции	Вид оценочного материала, обеспечивающего формирование компетенций
<b>ПКС-1.</b> Умение ясно и понятно представлять математические знания с учетом уровня аудитории.	<b>Знать:</b> - постановки классических задач математики, - основные известные научные результаты, соответствующие профилю подготовки; - перспективные научные направления в профильной предметной области.	<b>ПКС-1.1.</b> Способен обрабатывать, анализировать и осуществлять сбор информации по заданной тематике.  <b>ПКС-1.2.</b> Способен формулировать математические знания с учетом уровня слушателей.	Типовые оценочные материалы для устного опроса (п. 5.1.1); типовые оценочные материалы для контрольной работы (п. 5.1.2); типовые тестовые задания (п. 5.2.2); типовые оценочные материалы к зачету и экзамену (п. 5.3).
	<b>Уметь:</b> - математически корректно ставить задачи, известные научные результаты, - планировать цели и устанавливать приоритеты при решении конкретных задач с учетом условий, средств, личностных возможностей, - ясно и понятно представлять математические знания с учетом уровня аудитории.		Типовые оценочные материалы для устного опроса (п. 5.1.1); типовые оценочные материалы для контрольной работы (п. 5.1.2); типовые тестовые задания (п. 5.2.2); типовые оценочные материалы к зачету и экзамену (п. 5.3).
	<b>Владеть:</b> - различными формами представления знаний и научных результатов; - методами решения классических задач математики.		Типовые оценочные материалы для устного опроса (п. 5.1.1); типовые оценочные материалы для контрольной работы (п. 5.1.2); типовые тестовые задания (п. 5.2.2);

			типовые оценочные материалы к зачету и экзамену (п. 5.3).
--	--	--	---

Таким образом, выполнение типовых заданий, представленных в разделе 5 «Оценочные материалы для текущего и рубежного контроля успеваемости и промежуточной аттестации» позволит обеспечить формирование общекультурной и профессиональной компетенции ПКС-1.1, ПКС-1.2.

## 7. Учебно-методическое обеспечение дисциплины

### 7.1. Нормативно-законодательные акты

1. Гражданский кодекс РФ: [электронный ресурс] // Доступ из справочной системы "Гарант". <http://www.garantexpress.ru>.
2. Федеральный государственный образовательный стандарт высшего образования - специалитет по специальности 01.05.01 Фундаментальная математика и механика, утвержденный приказом Министерства образования и науки РФ от 10 января 2018 г. №16 (зарегистрировано в Минюсте РФ 6 февраля 2018 г. №49943). [https://fgosvo.ru/uploadfiles/FGOS%20VO%203+%/Spec/010501\\_C\\_3\\_18062021.pdf](https://fgosvo.ru/uploadfiles/FGOS%20VO%203+%/Spec/010501_C_3_18062021.pdf)

### 7.2. Основная литература

1. Асташова И.В. Функциональный анализ: учебное пособие / И.В. Асташова. – Электрон.тестовые данные. –М.: Евразийский открытый институт. 2011. -112с. –Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/11120.html>.
2. Сухинов А.И. Лекции по функциональному анализу: учебное пособие/ Сухинов А.И., Фирсов И.П.- Ростов-на-Дону: Южный федеральный университет, 2009. - 192 с. - Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/46993.html>.
3. Ревина С.В. Функциональный анализ в примерах и задачах [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Ревина С.В., Сазонов Л.И.— Электрон. текстовые данные.— Ростов-на-Дону: Южный федеральный университет, 2009.— 120 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/47190.html>
4. Скопин В.А. Функциональный анализ и интегральные уравнения [Электронный ресурс]: методические указания к самостоятельной работе/ Скопин В.А., Седых И.А.— Электрон. текстовые данные.— Липецк: Липецкий государственный технический университет, ЭБС АСВ, 2012.— 17 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/55174.html>

### 7.3. Дополнительная литература

1. Антонец А.Б., Князев Л.Н., Радонь Я.В. Задачи и упражнения по функциональному анализу. Изд-во Либроком, 2010.
2. Водахова В.А., Нахушева Ф.Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения. Методическая разработка. Нальчик, КБГУ, 1995.
3. Иосида К. Функциональный анализ. Пер. с англ. изд.3. 2010.
4. Кирилов А.А., Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа. Учебное пособие М., Наука, 1979 г., 381 стр.
5. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. – 517с.
6. Рудин У. Функциональный анализ. – Санкт-Петербург, Лань, 2005.
7. Садовничий В.А. Теория операторов. – М.: Дрофа, 2001.
8. Садовничий В.А. Теория операторов. М.: Дрофа, 2001.
9. Треногин В.А. Функциональный анализ. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 488 с.



10. Треногин В.А. Функциональный анализ. Изд.4. испр. 2007. Изд-во Физматлит.
11. Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С. Задачи и упражнения по функциональному анализу М., ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 240 с.

#### 7.4. Периодические издания

1. Вестник МГУ Серия 1. Математика. Механика.
2. Дифференциальные уравнения
3. Доклады РАН
4. Журнал вычислительной математики и математической физики
5. Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки
6. Успехи математических наук

#### 7.5. Интернет-ресурсы

При изучении дисциплины «Функциональный анализ» обучающиеся обеспечены доступом (удаленный доступ) к ресурсам:

– **общие информационные, справочные и поисковые:**

1. Справочная правовая система «Гарант». URL: <http://www.garant.ru>.
2. Справочная правовая система «Консультант Плюс». URL: <http://www.consultant.ru>

#### Перечень актуальных электронных информационных баз данных, к которым обеспечен доступ пользователям КБГУ

№п/п	Наименование электронного ресурса	Краткая характеристика	Адрес сайта	Условия доступа
1.	<b>Научная электронная библиотека (НЭБ РФФИ)</b>	Электр. библиотека научных публикаций - около 4000 иностранных и 3900 отечественных научных журналов, рефераты публикаций 20 тыс. журналов, а также описания 1,5 млн. зарубежных и российских диссертаций; 2800 росс. журналов на безвозмездной основе	<a href="http://elibrary.ru">http://elibrary.ru</a>	Полный доступ
2.	<b>База данных Science Index (РИНЦ)</b>	Национальная информационно-аналитическая система, аккумулирующая более 6 миллионов публикаций российских авторов, а также информацию об их цитировании из более 4500 российских журналов.	<a href="http://elibrary.ru">http://elibrary.ru</a>	Авторизованный доступ. Позволяет дополнять и уточнять сведения о публикациях ученых КБГУ, имеющих в РИНЦ
3.	<b>ЭБС «Консультант студента»</b>	13800 изданий по всем областям знаний, включает более чем 12000 учебников и учебных пособий для ВО и СПО, 864 наименований журналов и 917 монографий.	<a href="http://www.studmedlib.ru">http://www.studmedlib.ru</a> <a href="http://www.medcollegelib.ru">http://www.medcollegelib.ru</a>	Полный доступ (регистрация по IP-адресам КБГУ)
4.	<b>«Электронная библиотека технического вуза» (ЭБС «Консультант студента»)</b>	Коллекция «Медицина (ВО) ГЭОТАР-Медиа. Books in English (книги на английском языке)»	<a href="http://www.studmedlib.ru">http://www.studmedlib.ru</a>	Полный доступ (регистрация по IP-адресам КБГУ)
5.	<b>ЭБС «Лань»</b>	Электронные версии книг	<a href="https://e.lanbook.com/">https://e.lanbook.com/</a>	Полный доступ

		ведущих издательств учебной и научной литературы (в том числе университетских издательств), так и электронные версии периодических изданий по различным областям знаний.		(регистрация по IP-адресам КБГУ)
6.	<b>Национальная электронная библиотека РГБ</b>	Объединенный электронный каталог фондов российских библиотек, содержащий 4 331 542 электронных документов образовательного и научного характера по различным отраслям знаний	<a href="https://нэб.рф">https://нэб.рф</a>	Доступ с электронного читального зала библиотеки КБГУ
7.	<b>ЭБС «IPRbooks»</b>	107831 публикаций, в т.ч.: 19071 – учебных изданий, 6746 – научных изданий, 700 коллекций, 343 журнала ВАК, 2085 аудиоизданий.	<a href="http://iprbookshop.ru/">http://iprbookshop.ru/</a>	Полный доступ (регистрация по IP-адресам КБГУ)
8.	<b>ЭБС «Юрайт» для СПО</b>	Электронные версии учебной и научной литературы издательств «Юрайт» для СПО и электронные версии периодических изданий по различным областям знаний.	<a href="https://www.biblio-online.ru/">https://www.biblio-online.ru/</a>	Полный доступ (регистрация по IP-адресам КБГУ)
9.	<b>Polpred.com. Новости. Обзор СМИ. Россия и зарубежье</b>	Обзор СМИ России и зарубежья. Полные тексты + аналитика из 600 изданий по 53 отраслям	<a href="http://polpred.com">http://polpred.com</a>	Доступ по IP-адресам КБГУ
10.	<b>Президентская библиотека им. Б.Н. Ельцина</b>	Более 500 000 электронных документов по истории Отечества, российской государственности, русскому языку и праву	<a href="http://www.prilib.ru">http://www.prilib.ru</a>	Авторизованный доступ из библиотеки (ауд. №115,214)

***Кроме того, обучающиеся могут воспользоваться профессиональными поисковыми системами:***

1. Служба тематических толковых словарей <http://glossary.ru/>
2. Словари и энциклопедии <https://dic.academic.ru/>
3. Википедия <http://ru.wikipedia.org/wiki/>

## **7.6. Методические указания к практическим занятиям**

Целью практических занятий является обеспечение связи теории и практики. Практические занятия содействуют выработке у студентов умений и навыков применения знаний, полученных на лекциях и в ходе самостоятельной работы. В ходе практических занятий студенты приобретают профессиональные умения и навыки для решения практических задач и развития у них математического мышления, и интеллектуальных способностей.

Практические занятия позволяют углубить и закрепить теоретические знания в интересах профессиональной подготовки. Они позволяют продемонстрировать знания, умение читать и понимать учебные и научные материалы, а также применять их при решении задач.

Базовыми видами учебной работы студентов являются аудиторная и самостоятельная. Аудиторной работе обязательно должна предшествовать самостоятельная работа.

Материал, выносимый на промежуточные контрольные мероприятия, базируется на теоретической части курса, поэтому вопросы, излагаемые на лекциях, а также выносимые на

самостоятельную проработку, должны регулярно закрепляться как во время аудиторных занятий, так и в часы самостоятельной работы.

Подготовку к практическим занятиям рекомендуется начинать заблаговременно и проводить в следующей последовательности: уяснение темы и основных вопросов, выносимых на занятие; определение порядка подготовки к занятию; изучение теоретического материала по теме работы и методических указаний по решению задач.

При изучении литературы необходимо проработать информацию, глубоко осмыслив прочитанное. В ходе подготовки к занятию студенты могут выполнить:

- конспектирование первоисточников и другой учебной литературы;
- проработку учебного материала (по конспектам лекций, учебной и научной литературе) и подготовку докладов;
- поиск и обзор научных публикаций и электронных источников информации;
- решение задач, упражнений;
- работу с тестами и вопросами для самопроверки; и т.д.

При подготовке к ответу студент должен обратить внимание на следующие требования: свободное изложение материала; аргументированность всех содержащихся в ответе выводов и заключений; культуру речи. Выступающий должен уметь отстаивать свои результаты. Студенты должны быть готовы к выступлению добровольно или по вызову преподавателя по всем вопросам, рассматриваемым на занятии.

В ходе практического занятия студентам рекомендуется внимательно слушать выступления товарищей, делать при необходимости записи, а также замечать допущенные в решениях студентов неточности, ошибки и исправлять их. В конце занятия преподаватель подводит итоги изучения темы, объявляет оценки, полученные студентами, дает в случае необходимости рекомендации по дополнительной работе над отдельными вопросами темы.

О формах и методах контроля знаний студентов, о содержании контрольных заданий, а также об итогах контрольных мероприятий студенты своевременно информируются преподавателем.

Самостоятельная работа студентов – это планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное время по заданию и под руководством преподавателя.

Целью самостоятельной работы является глубокое понимание и усвоение курса лекций и практических занятий, подготовка к выполнению контрольных работ, коллоквиуму и к сдаче экзамена, а также приобретение опыта творческой и исследовательской деятельности.

Формы самостоятельной работы студентов полностью определяются содержанием учебной дисциплины. В качестве основных форм самостоятельной работы студентов при изучении дисциплины “Функциональный анализ” можно выделить следующие:

- выполнение домашних заданий;
- подготовка к тестированию;
- подготовка к коллоквиуму;
- самостоятельное изучение теоретического материала и литературы;
- подготовка к контрольной работе;
- самостоятельная проверка собственных знаний;
- подготовка к экзамену.

Результаты самостоятельной работы контролируются преподавателем и учитываются при текущей, рубежной и промежуточной аттестации студента. Немаловажную роль при этом должны играть систематичность и плодотворность проводимой самостоятельной работы.

### **7.7. Методические указания к курсовому проектированию и другим видам самостоятельной работы**

Учебная работа по дисциплине «Функциональный анализ» состоит из контактной работы (лекции и практические занятия) и самостоятельной работы. Доля контактной учебной работы в общем объеме времени, отведенном для изучения дисциплины, составляет 66,11 % (в том числе лекционных занятий – 28,33%, практических занятий – 37,78%), доля самостоятельной работы – 33,89 %. Соотношение лекционных, семинарских, лабораторных и

практических занятий к общему количеству часов соответствует учебному плану направления 01.03.01 – «Математика», профиль «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление».

Для подготовки к практическим занятиям необходимо рассмотреть контрольные вопросы, при необходимости обратиться к рекомендуемой литературе, записать непонятные моменты в вопросах для уяснения их на предстоящем занятии.

### ***Методические рекомендации для обучающихся по изучению дисциплины «Функциональный анализ»***

Приступая к изучению дисциплины, обучающемуся необходимо ознакомиться с тематическим планом занятий, списком рекомендованной учебной литературы. Следует уяснить последовательность выполнения индивидуальных учебных заданий, занести в свою рабочую тетрадь темы и сроки проведения учебных работ. При изучении дисциплины обучающиеся выполняют следующие задания: изучают рекомендованную учебную и научную литературу; пишут контрольные работы; готовятся к практическим занятиям; выполняют самостоятельные работы; участвуют в выполнении практических заданий. Уровень и глубина усвоения дисциплины зависят от активной и систематической работы на лекциях, изучения рекомендованной литературы, выполнения контрольных письменных заданий

Курс изучается на лекциях, практических занятиях, при самостоятельной и индивидуальной работе обучающихся. Обучающийся для полного освоения материала должен не пропускать занятия и активно участвовать в учебном процессе. В случае нерегулярного посещения занятий у обучающихся есть доступ к электронному варианту лекции, заданий к практическим и лабораторным занятиям. Лекции включают все темы и основные вопросы. Для максимальной эффективности изучения необходимо постоянно вести конспект лекций, знать рекомендуемую преподавателем литературу, позволяющую дополнить знания и лучше подготовиться к практическим занятиям.

В соответствии с учебным планом на каждую тему выделено необходимое количество часов практических занятий, которые проводятся в соответствии с вопросами, рекомендованными к изучению по определенным темам. Обучающиеся должны регулярно готовиться к занятиям и участвовать в обсуждении вопросов. При подготовке к занятиям следует руководствоваться конспектом лекций и рекомендованной литературой. Тематический план дисциплины, учебно-методические материалы, а также список рекомендованной литературы приведены в рабочей программе

### ***Методические рекомендации при работе над конспектом во время проведения лекции***

В процессе лекционных занятий целесообразно конспектировать учебный материал. Для этого используются общие и утвердившиеся в практике правила, и приемы конспектирования лекций.

Конспектирование лекций ведется в специально отведенной для этого тетради, каждый лист которой должен иметь поля, на которых делаются пометки из рекомендованной литературы, дополняющие материал прослушанной лекции, а также подчеркивающие особую важность тех или иных теоретических положений.

Целесообразно записывать тему и план лекций, рекомендуемую литературу к теме. Записи разделов лекции должны иметь заголовки, подзаголовки, красные строки. Для выделения разделов, выводов, определений, основных идей можно использовать цветные карандаши и фломастеры.

Названные в лекции ссылки на первоисточники надо пометить на полях, чтобы при самостоятельной работе найти и вписать их. Каждому студенту необходимо выработать и использовать допустимые сокращения наиболее распространенных терминов и понятий.

### ***Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям***

Практические занятия – составная часть учебного процесса, проходящие при активном участии студентов. Они способствуют углубленному изучению наиболее сложных проблем науки и служат основной формой подведения итогов самостоятельной работы обучающихся. Целью практических занятий является углубление и закрепление теоретических знаний, полученных обучающимися на лекциях и в процессе самостоятельного изучения учебного материала, а, следовательно, формирование у них определенных умений и навыков.

В ходе подготовки к занятиям необходимо прочитать конспект лекции, изучить основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой, выполнить выданные преподавателем практические задания. При этом учесть рекомендации преподавателя и требования программы. Дорабатывать свой конспект лекции, делая в нем соответствующие записи из литературы.

Желательно при подготовке к практическим занятиям по дисциплине одновременно использовать несколько источников, раскрывающих заданные вопросы.

На практических занятиях обучающиеся учатся грамотно излагать проблемы, свободно высказывать свои мысли и суждения, рассматривают ситуации, способствующие развитию профессиональной компетентности.

### ***Методические рекомендации по организации самостоятельной работы***

Самостоятельная работа обучающихся – способ активного, целенаправленного приобретения студентом новых для него знаний и умений без непосредственного участия в этом процессе преподавателей. Повышение роли самостоятельной работы обучающихся при проведении различных видов учебных занятий предполагает:

- оптимизацию методов обучения, внедрение в учебный процесс новых технологий обучения, повышающих производительность труда преподавателя, активное использование информационных технологий, позволяющих обучающемуся в удобное для него время осваивать учебный материал;
- широкое внедрение компьютеризированного тестирования;
- совершенствование методики проведения практик и научно-исследовательской работы обучающихся, поскольку именно эти виды учебной работы в первую очередь готовят обучающихся к самостоятельному выполнению профессиональных задач;
- модернизацию системы курсового и дипломного проектирования, которая должна повышать роль студента в подборе материала, поиске путей решения задач.

Самостоятельная работа приводит студента к получению новых знаний, упорядочению и углублению имеющихся знаний, формированию у него профессиональных навыков и умений. Самостоятельная работа выполняет ряд функций: развивающую; информационно-обучающую; ориентирующую и стимулирующую; воспитывающую; исследовательскую.

В рамках курса выполняются следующие виды самостоятельной работы:

- 1) проработка учебного материала (по конспектам, учебной и научной литературе);
- 2) выполнение разноуровневых задач и заданий;
- 3) работа с тестами и вопросами для самопроверки;
- 4) выполнение итоговой контрольной работы.

Студентам рекомендуется с самого начала освоения курса работать с литературой и предлагаемыми заданиями в форме подготовки к очередному аудиторному занятию. При этом актуализируются имеющиеся знания, а также создается база для усвоения нового материала, возникают вопросы, ответы на которые студент получает в аудитории.

Необходимо отметить, что некоторые задания для самостоятельной работы по курсу имеют определенную специфику. При освоении курса студент может пользоваться библиотекой вуза, которая в полной мере обеспечена соответствующей литературой. Значительную помощь в подготовке к очередному занятию может оказать имеющийся в учебно-методическом комплексе краткий конспект лекций. Он же может использоваться и для закрепления полученного в аудитории материала.

Самостоятельная работа студентов предусмотрена учебным планом и выполняется в обязательном порядке. Задания предложены по каждой изучаемой теме и могут готовиться

индивидуально или в группе. По необходимости студент может обращаться за консультацией к преподавателю. Выполнение заданий контролируется и оценивается преподавателем.

Для успешного самостоятельного изучения материала сегодня используются различные средства обучения, среди которых особое место занимают информационные технологии разного уровня и направленности: электронные учебники и курсы лекций, базы тестовых заданий и задач. Электронный учебник представляет собой программное средство, позволяющее представить для изучения теоретический материал, организовать апробирование, тренаж и самостоятельную творческую работу, помогающее студентам и преподавателю оценить уровень знаний в определенной тематике, а также содержащее необходимую справочную информацию. Электронный учебник может интегрировать в себе возможности различных педагогических программных средств: обучающих программ, справочников, учебных баз данных, тренажеров, контролирующих программ.

Для успешной организации самостоятельной работы все активнее применяются разнообразные образовательные ресурсы в сети Интернет: системы тестирования по различным областям, виртуальные лекции, лаборатории, при этом пользователю достаточно иметь компьютер и подключение к Интернету для того, чтобы связаться с преподавателем, решать вычислительные задачи и получать знания. Использование сетей усиливает роль самостоятельной работы студента и позволяет кардинальным образом изменить методику преподавания.

Студент может получать все задания и методические указания через сервер, что дает ему возможность привести в соответствие личные возможности с необходимыми для выполнения работ трудозатратами. Студент имеет возможность выполнять работу дома или в аудитории. Большое воспитательное и образовательное значение в самостоятельном учебном труде студента имеет самоконтроль. Самоконтроль возбуждает и поддерживает внимание и интерес, повышает активность памяти и мышления, позволяет студенту своевременно обнаружить и устранить допущенные ошибки и недостатки, объективно определить уровень своих знаний, практических умений. Самое доступное и простое средство самоконтроля с применением информационно-коммуникационных технологий – это ряд тестов «on-line», которые позволяют в режиме реального времени определить свой уровень владения предметным материалом, выявить свои ошибки и получить рекомендации по самосовершенствованию.

### ***Методические рекомендации по работе с литературой***

Всю литературу можно разделить на учебники и учебные пособия, оригинальные научные монографические источники, научные публикации в периодической печати. Из них можно выделить литературу основную (рекомендуемую), дополнительную и литературу для углубленного изучения дисциплины.

Изучение дисциплины следует начинать с учебника, поскольку учебник – это книга, в которой изложены основы научных знаний по определенному предмету в соответствии с целями и задачами обучения, установленными программой.

При работе с литературой необходимо учитывать, что имеются различные виды чтения, и каждый из них используется на определенных этапах освоения материала.

*Предварительное* чтение направлено на выявление в тексте незнакомых терминов и поиск их значения в справочной литературе. В частности, при чтении указанной литературы необходимо подробнейшим образом анализировать понятия.

*Сквозное чтение* предполагает прочтение материала от начала до конца. Сквозное чтение литературы из приведенного списка дает возможность студенту сформировать свод основных понятий из изучаемой области и свободно владеть ими.

*Выборочное* – наоборот, имеет целью поиск и отбор материала. В рамках данного курса выборочное чтение, как способ освоения содержания курса, должно использоваться при подготовке к практическим занятиям по соответствующим разделам.

*Аналитическое чтение* – это критический разбор текста с последующим его конспектированием. Освоение указанных понятий будет наиболее эффективным в том случае, если при чтении текстов студент будет задавать к этим текстам вопросы. Часть из этих вопросов сформулирована в ФОС в перечне вопросов для собеседования. Перечень этих

вопросов ограничен, поэтому важно не только содержание вопросов, но сам принцип освоения литературы с помощью вопросов к текстам.

Целью *изучающего* чтения является глубокое и всестороннее понимание учебной информации. Есть несколько приемов изучающего чтения:

- чтение по алгоритму предполагает разбиение информации на блоки: название, автор, источник, основная идея текста, фактический материал, анализ текста путем сопоставления имеющихся точек зрения по рассматриваемым вопросам, новизна;

- прием постановки вопросов к тексту имеет следующий алгоритм: медленно прочитать текст, стараясь понять смысл изложенного; выделить ключевые слова в тексте; постараться понять основные идеи, подтекст и общий замысел автора.

- прием тестирования заключается в формулировании тезисов в виде положений, утверждений, выводов.

Можно добавить и иные приемы: прием реферирования, прием комментирования.

Важной составляющей любого солидного научного издания является список литературы, на которую ссылается автор. При возникновении интереса к какой-то обсуждаемой в тексте проблеме всегда есть возможность обратиться к списку относящейся к ней литературы. В этом случае вся проблема как бы разбивается на составляющие части, каждая из которых может изучаться отдельно от других. При этом важно не терять из вида общий контекст и не погружаться чрезмерно в детали, потому что таким образом можно не увидеть главного.

Подготовка к экзамену и зачету должна проводиться на основе лекционного материала, материала практических занятий с обязательным обращением к основным учебникам по курсу. Это позволит исключить ошибки в понимании материала, облегчит его осмысление, прокомментирует материал многочисленными примерами.

### ***Методические рекомендации для подготовки к экзамену:***

Экзамен является формой итогового контроля знаний и умений, обучающихся по данной дисциплине, полученных на лекциях, практических занятиях и в процессе самостоятельной работы. Основой для определения оценки служит уровень усвоения обучающимися материала, предусмотренного данной рабочей программой. К экзамену допускаются студенты, набравшие 36 и более баллов по итогам текущего и промежуточного контроля. На экзамене студент может набрать от 15 до 30 баллов.

В период подготовки к экзамену обучающиеся вновь обращаются к учебно-методическому материалу и закрепляют промежуточные знания.

Подготовка обучающегося к экзамену включает три этапа:

- самостоятельная работа в течение семестра;
- непосредственная подготовка в дни, предшествующие экзамену по темам курса;
- подготовка к ответу на экзаменационные вопросы.

При подготовке к экзамену обучающимся целесообразно использовать материалы лекций, учебно-методические комплексы, нормативные документы, основную и дополнительную литературу.

На экзамен выносятся материал в объеме, предусмотренном рабочей программой учебной дисциплины за семестр. Экзамен проводится в письменной / устной форме.

При проведении экзамена в письменной (устной) форме, ведущий преподаватель составляет экзаменационные билеты, которые включают в себя: тестовые задания; теоретические задания; задачи или ситуации. Формулировка теоретических задания совпадает с формулировкой перечня экзаменационных вопросов, доведенных до сведения обучающихся накануне экзаменационной сессии. Содержание вопросов одного билета относится к различным разделам программы с тем, чтобы более полно охватить материал учебной дисциплины.

В аудитории, где проводится устный экзамен, должно одновременно находиться не более шести студентов на одного преподавателя, принимающего экзамен. На подготовку ответа на билет на экзамене отводится 40 минут.

При проведении письменного экзамена на работу отводится 60 минут.

Результат устного (письменного) экзамена выражается оценками:

**Оценка «отлично» – от 91 до 100 баллов** – теоретическое содержание курса освоено полностью, без пробелов, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы. Все предусмотренные программой обучения учебные задания выполнены, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к максимальному. На экзамене студент демонстрирует глубокие знания предусмотренного программой материала, умеет четко, лаконично и логически последовательно отвечать на поставленные вопросы.

**Оценка «хорошо» – от 81 до 90 баллов** – теоретическое содержание курса освоено, необходимые практические навыки работы сформированы, выполненные учебные задания содержат незначительные ошибки. На экзамене студент демонстрирует твердые знания основного (программного) материала, умеет четко, грамотно, без существенных неточностей отвечать на поставленные вопросы.

**Оценка «удовлетворительно» – от 61 до 80 баллов** – теоретическое содержание курса освоено не полностью, необходимые практические навыки работы сформированы частично, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. На экзамене студент демонстрирует знание только основного материала, ответы содержат неточности, слабо аргументированы, нарушена последовательность изложения материала.

**Оценка «неудовлетворительно» – от 36 до 60 баллов** – теоретическое содержание курса не освоено, необходимые практические навыки работы не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки, дополнительная самостоятельная работа над материалом курса не приведет к существенному повышению качества выполнения учебных заданий. На экзамене студент демонстрирует незнание значительной части программного материала, существенные ошибки в ответах на вопросы, неумение ориентироваться в материале, незнание основных понятий дисциплины.

## **8. Материально-техническое обеспечение дисциплины**

### **8.1. Требования к материально-техническому обеспечению**

Для реализации рабочей программы дисциплины имеются специальные помещения для проведения занятий лекционного и практического типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы и помещения для хранения и профилактического обслуживания оборудования. Специальные помещения укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления информации большой аудитории.

Материально-техническое обеспечение: доступ к фондам учебных пособий, библиотечным фондам с периодическими изданиями по соответствующим темам, наличие компьютеров, подключенных к сети «Интернет» и оснащенных средствами медиапрезентаций (медиакоммуникаций).

Чтение лекций проводится в аудитории, обеспеченной мультимедийными средствами (презентационная лекционная часть доступна всем). Практические и лабораторные занятия проводятся в аудитории, оснащенной интерактивной и обычной доской.

При проведении занятий лекционного типа практических (семинарских) занятий используются

*лицензионное программное обеспечение:*

- программное обеспечение средств антивирусной защиты Kaspersky Endpoint Security для бизнеса - Стандартный Russian Edition. 1000-1500 Node 1 year Educational Renewal License (KL4863RAVFQ);

- программное обеспечение для работы с PDF-документами. ABBYY FineReader 15 Business.

- программное обеспечение для работы с документами формата PDF Acrobat Pro DC for teams ALL Multiple Platforms Multi European Languages Level 1 (1-9) Education Named License 65297997BB01A12

- офисное программное обеспечение МойОфис Стандартный



*свободно распространяемые программы:*

- Web Browser – Firefox;
- AcademicMarthCADLicense - математическое программное обеспечение, которое позволяет выполнять, анализировать важнейшие инженерные расчеты и обмениваться ими;
- 7zip - программ для сжатия и распаковки файлов;
- AdobeReader– программа для чтения PDF файлов;
- DjvuReader – приложения для распознавания, конвентирования и работы с Djvu файлами;

## **8.2. Особенности реализации дисциплины для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья**

Для студентов с ограниченными возможностями здоровья созданы специальные условия для получения образования. В целях доступности получения высшего образования по образовательным программам инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья университетом обеспечивается:

- 1) альтернативная версия официального сайта в сети «Интернет» для слабовидящих;
- 2) для инвалидов с нарушениями зрения (слабовидящие, слепые)
  - присутствие ассистента, оказывающего обучающемуся необходимую помощь, дублирование вслух справочной информации о расписании учебных занятий; наличие средств для усиления остаточного зрения, брайлевской компьютерной техники, видеоувеличителей, программ не визуального доступа к информации, программ-синтезаторов речи и других технических средств приема-передачи учебной информации в доступных формах для студентов с нарушениями зрения;
  - задания для выполнения на экзамене и зачете зачитываются ассистентом;
  - письменные задания выполняются на бумаге, надиктовываются ассистенту обучающимся;
- 3) для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья по слуху (слабослышащие, глухие):
  - на экзамене и зачете присутствует ассистент, оказывающий студенту необходимую техническую помощь с учетом индивидуальных особенностей (он помогает занять рабочее место, передвигаться, прочитать и оформить задание, в том числе записывая под диктовку);
  - экзамене и зачет проводится в письменной форме;
- 4) для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья, имеющих нарушения опорно-двигательного аппарата, созданы материально-технические условия обеспечивающие возможность беспрепятственного доступа обучающихся в учебные помещения, объекту питания, туалетные и другие помещения университета, а также пребывания в указанных помещениях (наличие расширенных дверных проемов, поручней и других приспособлений).
  - письменные задания выполняются на компьютере со специализированным программным обеспечением или надиктовываются ассистенту;
  - по желанию студента экзамене и зачет проводится в устной форме.

Обучающиеся из числа лиц с ограниченными возможностями здоровья обеспечены электронными образовательными ресурсами в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья.

**Лист изменений (дополнений)**

в рабочую программу по дисциплине «Функциональный анализ» по программе специалитета  
01.05.01 Фундаментальные математика и механика, профиль «Фундаментальная математика»  
на \_\_\_\_/\_\_\_\_ учебный год

№ п/п	Элемент (пункт) РПД	Перечень вносимых изменений (дополнений)	Примечание

Обсуждена и рекомендована на заседании кафедры алгебры и дифференциальных уравнений

Протокол №     от « \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 20 \_\_\_\_ г.

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_ / М.С. Нирова / « \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 20 \_\_\_\_ г.

подпись

Ф.И.О.

*Распределение баллов текущего и рубежного контроля*

№ п/п	Вид контроля	Сумма баллов			
		Общая сумма	1-я точка	2-я точка	3-я точка
1	<i>Посещение занятий</i>	<i>до 10 баллов</i>	<i>до 3 б.</i>	<i>до 3 б.</i>	<i>до 4 б.</i>
2	<i>Текущий контроль:</i>	<i>до 30 баллов</i>	<i>до 10 б.</i>	<i>до 10 б.</i>	<i>до 10 б.</i>
	<i>Ответ на 5 вопросов</i>	<i>от 0 до 15 б.</i>	<i>от 0 до 5 б.</i>	<i>От 0 до 5 б.</i>	<i>От 0 до 5 б.</i>
	Полный правильный ответ	до 15 баллов	5 б.	5 б.	5 б.
	Неполный правильный ответ	от 3 до 15 б.	от 1 до 5 б.	от 1 до 5 б.	от 1 до 5 б.
	Ответ, содержащий неточности, ошибки	0 б.	0 б.	0 б.	0 б.
	<i>Выполнение самостоятельных заданий (решение задач, написание рефератов, доклад)</i>	<i>от 0 до 15 б.</i>	<i>от 0 до 5 б.</i>	<i>от 0 до 5 б.</i>	<i>от 0 до 5 б.</i>
3	<i>Рубежный контроль</i>	<i>до 30 баллов</i>	<i>до 10 б.</i>	<i>до 10 б.</i>	<i>до 10 б.</i>
	тестирование	от 0 до 15 б.	от 0 до 5 б.	от 0 до 5 б.	от 0 до 5 б.
	коллоквиум	от 0 до 15 б.	от 0 до 5 б.	от 0 до 5 б.	от 0 до 5 б.
<b>Итого сумма текущего и рубежного контроля</b>		<b>до 70 баллов</b>	<b>до 23 б.</b>	<b>до 23 б.</b>	<b>до 24 б.</b>
<b>В случае экзамена</b>					
	<b>Первый этап (базовый уровень) – оценка «удовлетворительно»</b>	не менее 36 б.	не менее 12 б.	не менее 12 б.	не менее 12 б.
	<b>Второй этап (продвинутый уровень) – оценка «хорошо»</b>	менее 70 б. (51-69 б.)	менее 23 б.	менее 23 б.	менее 24 б.
	<b>Третий этап (высокий уровень) – оценка «отлично»</b>	не менее 70 б.	не менее 23 б.	не менее 23 б.	не менее 24 б.

**Шкала оценивания планируемых результатов обучения**  
**Текущий и рубежный контроль**

Семестр	Шкала оценивания			
	0-35 баллов	36-50 баллов	51-60 баллов	56-70 баллов
5,6	Частичное посещение аудиторных занятий. Неудовлетворительное выполнение лабораторных и практических работ. Плохая подготовка к балльно-рейтинговым мероприятиям. Студент не допускается к промежуточной аттестации	Полное или частичное посещение аудиторных занятий. Частичное выполнение практических работ. Выполнение контрольных работ, тестовых заданий на оценку «удовлетворительно».	Полное или частичное посещение аудиторных занятий. Полное выполнение практических работ. Выполнение контрольных работ, тестовых заданий на оценки «хорошо».	Полное посещение аудиторных занятий. Полное выполнение практических занятий. Выполнение контрольных работ, тестовых заданий на оценки «отлично».

**Промежуточная аттестация (зачёт)**

Семестр	Шкала оценивания	
	Незачтено (36-60)	Зачтено (61-70)
5	Студент имеет 36-60 баллов по итогам текущего и рубежного контроля, на зачёте не ответил ни на один вопрос.	Студент имеет 36-45 баллов по итогам текущего и рубежного контроля, на зачете представил полный ответ на один вопрос и частично (полностью) ответил на второй. Студент имеет 46-60 баллов по итогам текущего и рубежного контроля, на зачете дал полный ответ на один вопрос или частично ответил на оба вопроса. Студенту, имеющему 61-70 баллов по итогам текущего и рубежного контроля, выставляется отметка «зачтено» без сдачи зачёта.

**«Зачтено»** выставляется обучающемуся, продемонстрировавшему полное, всестороннее, осознанное правильное знание программного материала и изложившему ответ логично, грамотно, убедительно, готового к дальнейшему профессиональному совершенствованию.

При ответе обучающийся может допустить некоторые неточности, негрубые ошибки, затрудняться в самостоятельном изложении материала, но правильно отвечать на задаваемые ему вопросы, в результате наводящих вопросов с помощью преподавателя исправлять допущенные ошибки и неточности.

**«Не зачтено»** может быть выставлено обучающемуся, обнаружившему неполное, неосознанное знание учебно-программного материала, допускающему грубые ошибки, неспособному самостоятельно изложить ответ на вопрос, отвечающему неправильно или не

дающему ответ на заданные вопросы. Демонстрируемый уровень знаний не может быть признан достаточным для профессиональной деятельности.

**Промежуточная аттестация (экзамен)**

Семестр	Шкала оценивания			
	Неудовлетворительно (36-60 баллов)	Удовлетворительно (61-80 баллов)	Хорошо (81-90 баллов)	Отлично (91-100 баллов)
6	Студент имеет 36-60 баллов по итогам текущего и рубежного контроля, на экзамене не дал полного ответа ни на один вопрос. Студент имеет 36-45 баллов по итогам текущего и рубежного контроля, на экзамене дал полный ответ только на один вопрос.	Студент имеет 36-50 баллов по итогам текущего и рубежного контроля, на экзамене дал полный ответ на один вопрос и частично (полностью) ответил на второй. Студент имеет 46-60 баллов по итогам текущего и рубежного контроля, на экзамене дал полный ответ на один вопрос или частично ответил на все вопросы. Студент имеет по итогам текущего и рубежного контроля 61-70 баллов на экзамене не дал полного ответа ни на один вопрос.	Студент имеет 51-60 баллов по итогам текущего и рубежного контроля, на экзамене дал полный ответ на один вопрос и частично (полностью) ответил на второй. Студент имеет 61 – 65 баллов по итогам текущего и рубежного контроля, на экзамене дал полный ответ на один вопрос и частично ответил на второй. Студент имеет 66-70 баллов по итогам текущего и рубежного контроля, на экзамене дал полный ответ на один вопрос.	Студент имеет 61-70 баллов по итогам текущего и рубежного контроля, на экзамене дал полный ответ на один вопрос и частично (полностью) ответил на второй.