

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования «Кабардино-Балкарский государственный университет  
им. Х.М. Бербекова» (КБГУ)

ИНСТИТУТ ФИЗИКИ И МАТЕМАТИКИ

КАФЕДРА АЛГЕБРЫ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

СОГЛАСОВАНО  
Руководитель образовательной  
программы \_\_\_\_\_  
« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 202 \_\_\_\_ г.

УТВЕРЖДАЮ  
Директор ИФ и М  
\_\_\_\_\_ Б.И. Кунижев  
« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 202 \_\_\_\_ г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

*«ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА»*

Программа специалитета  
01.05.01 Фундаментальные математика и механика  
(код и наименование программы специалитета)

Направленность (профиль)  
Фундаментальная математика  
(наименование направленности (профиля))

Квалификация (степень) выпускника  
специалист

Форма обучения  
Очная

Нальчик, 2024

Рабочая программа дисциплины (модуля) «Линейная алгебра» /сост. А.А.Токбаева – Нальчик: КБГУ, 2024г.

Рабочая программа дисциплины «Алгебра» предназначена для студентов очной формы обучения по программе специалитета 01.05.01 Фундаментальные математика и механика, профиль «Фундаментальная математика» III семестра, 2 курса.

Рабочая программа составлена с учетом Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по специальности 01.05.01 Фундаментальные математика и механика (уровень специалитета), утвержденного приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации от 10.01.2018г. №16 (зарегистрировано в Минюсте РФ 6 февраля 2018г. № 49943).

## Содержание

1	Цели и задачи освоения дисциплины.....	4
2	Место дисциплины в структуре ОПОП ВО .....	4
3	Требования к результатам освоения дисциплины .....	4
4	Содержание и структура дисциплины.....	6
5	Оценочные материалы для текущего и рубежного контроля успеваемости и промежуточной аттестации.....	10
6	Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности.....	24
7	Учебно-методическое обеспечение дисциплины .....	25
7.1.	Нормативно-законодательные акты.....	25
7.2.	Основная литература.....	26
7.3.	Дополнительная литература.....	26
7.4.	Периодические издания.....	27
7.5.	Интернет-ресурсы.....	27
7.6.	Методические указания по проведению различных учебных занятий, к курсовому проектированию и другим видам самостоятельной работы.....	29
8	Материально-техническое обеспечение дисциплины.....	33
	Лист изменений (дополнений) в рабочей программе дисциплины.....	35
	Приложения	

## **1. Цели и задачи освоения дисциплины.**

### **Цели дисциплины:**

- получение базовых знаний по линейной алгебре: линейные операторы, основные структуры современной алгебры, билинейные и квадратичные формы;
- формирование умений и навыков по использованию логического аппарата в процессе обучения;
- развитие логического мышления;
- получение представления о проблемах обоснования математики;
- формирование исследовательских умений общенаучного, специализированного математического и методического характера;
- формирование навыков владения современными методами анализа научной и научно-методической литературы.

### **Задачи дисциплины:**

- сформировать базовый понятийный аппарат, необходимый для восприятия и осмысления последующих курсов в блоке математических, информационных и методических дисциплин;
- сформировать навыки математического моделирования мыслительного процесса в различных предметных областях;
- способствовать формированию навыков работы с учебной, научной и научно-методической литературой;
- сформировать умения применять полученные знания для решения Линейная алгебраических задач;
- дать представление о современном состоянии научных исследований в области алгебры и сопряженных с ней областях знаний.

## **2. Место дисциплины в структуре ОПОП ВО**

Дисциплина «Линейная алгебра» относится к обязательной части Блока 1 «Дисциплины (модули)» программы специалитета 01.05.01 Фундаментальные математика и механика (Профиль: «Фундаментальная математика»). Знания, полученные в этом курсе, используются в аналитической геометрии, математическом анализе, дифференциальной геометрии и топологии, дискретной математике, математической логике, теории чисел и др.

## **3. Требования к результатам освоения содержания дисциплины.**

В совокупности с другими дисциплинами профиля «Фундаментальная математика» в соответствии с ФГОС ВО 3++ и ОПОП ВО по программе специалитета 01.05.01 Фундаментальные математика и механика дисциплина «Линейная алгебра» направлена на формирование следующей общепрофессиональной компетенции:

**Общепрофессиональные компетенции (ОПК-1):** Способен находить, формулировать и решать актуальные и значимые проблемы фундаментальной математики и механики.

*Индикаторы достижения компетенции ОПК-1:*

**ОПК – 1.1.** Способен использовать при решении профессиональных задач знания, полученные при изучении дисциплин математических и (или) естественных наук.

**ОПК – 1.2.** Способен использовать существующие математические методы при решении задач профессиональной деятельности.

В результате освоения дисциплины «Линейная алгебра» обучающийся должен:

**Знать:**

- определения основных понятий, и логических связей между ними;
- основные алгебраические структуры и их свойства.
- алгебру матриц и их приложения.
- векторные и евклидовы пространства, алгебру преобразования этих пространств.
- квадратичные формы и приведения их к нормальному виду.
- методы решения задач;
- формулировки теорем;
- описания алгоритмов (процессов построения объектов, решения задач, доказательств утверждений и др.).

**Уметь:**

- вычислять базис и размерность линейного пространства;
- проводить операции над линейными подпространствами;
- находить собственные векторы и собственные значения;
- находить канонический вид квадратичных форм.

**Владеть:**

- методами линейной алгебры;
- аппаратом теории групп и их представлений;
- способами применения специальных математических и других способов познавательной деятельности к объектам алгебры (приемами анализа формулировок задач, теорем).

#### 4. Содержание и структура дисциплины

**Таблица 1.** Содержание дисциплины «Линейная алгебра», перечень оценочных средств и контролируемых компетенций

№	Наименование раздела	Содержание раздела	Код контролируемой компетенции (или ее части)	Наименование оценочного средства
1	2	3	4	5
<b>3 семестр</b>				
1.	Линейные алгебры, Линейная алгебра линейных операторов, матрица линейного оператора.	Линейные операторы и функционалы. Умножение линейных операторов. Многочлен от линейного оператора. Вырожденные и невырожденные операторы. Линейные алгебры. Изоморфизм алгебр. Линейная алгебра линейных операторов. Инвариантные подпространства. Собственные значения и собственные векторы. Матрица линейного оператора на пространстве разложенном в прямую сумму инвариантных подпространств	ОПК-1	К, РК, Т, КР, УО
2.	Циклическое подпространство. Характеристический многочлен линейного оператора. Корневые векторы, нильпотентные операторы.	Циклическое подпространство и аннуляторы вектора Характеристический многочлен линейного оператора; матрица линейного оператора на циклическом подпространстве и ее характеристический многочлен. Теорема Гамильтона-Кэли Корневые векторы и корневые подпространства Нильпотентные операторы.	ОПК-1	К, РК, Т, КР, УО
3.	Полиномиальные матрицы.	Полиномиальные матрицы. Свойства Жорданова клетка. Жорданова нормальная форма матрицы линейного оператора в комплексном и вещественном пространстве.	ОПК-1	К, РК, Т, КР, УО

4.	Сопряженный оператор, унитарные и ортогональные операторы.	Унитарные пространства. Свойства Ортогональные и унитарные матрицы Сопряженный оператор Нормальные оператор Диагонализируемые операторы. Операторы простого спектра и простой структуры. Самосопряженные и симметрические операторы, их спектр Унитарные и ортогональные операторы.	ОПК-1	К, РК, Т, КР, УО
5.	Аффинные пространства, плоскости в аффинном пространстве. Тензоры.	Аффинные (точечные) пространства; аффинные системы координат. Плоскости в аффинном пространстве; их задание системами линейных уравнений. Взаимное расположение плоскостей в аффинном пространстве. Общее понятие о тензорах; координаты тензора. Операции над тензорами; свертка и след	ОПК-1	К, РК, Т, КР, УО

В графе 5 приводятся планируемые формы текущего контроля: защита контрольной работы (КР), коллоквиум (К), рубежный контроль (РК), тестирование (Т), устный опрос (УО).

На изучение курса отводится 180 часов (5 з.е.), из них: контактная работа 85 ч., в том числе лекционных – 34 часа; практических (семинарских) – 51 час; самостоятельная работа студента 95 часов; завершается в 3 семестре - экзаменом.

### Структура дисциплины

**Таблица 2.** Общая трудоемкость дисциплины составляет 5 з.ед. (180 часов)

Вид работы	Трудоемкость, часов / зачетных единиц	
	III семестр	всего
<b>Общая трудоемкость (в часах)</b>	<b>180</b>	<b>180</b>
<b>Контактная работа (в часах):</b>	<b>85</b>	<b>85</b>
<i>Лекционные занятия (Л)</i>	<i>34</i>	<i>34</i>
<i>Практические занятия (ПЗ)</i>	<i>51</i>	<i>51</i>
<b>Самостоятельная работа (в часах), в том числе контактная работа:</b>	<b>95</b>	<b>95</b>
Контрольная работа (КР)	12	12
Самостоятельное изучение разделов	56	56
Подготовка и прохождение промежуточной аттестации	27	27
<b>Вид промежуточной аттестации</b>	<b>Экзамен</b>	

**Таблица 3.** Лекционные занятия

№ п/п	Тема
<b>3 семестр</b>	
1.	Линейные алгебры. Изоморфизм алгебр. Линейная алгебра линейных операторов. <i>Цель и задачи изучения темы</i> – дать основные понятия теории алгебр и их изоморфизм, а также рассмотреть алгебру линейных операторов.
2.	Инвариантные подпространства. Собственные значения и собственные векторы. <i>Цель и задачи изучения темы</i> – изучить инвариантные подпространства, а также их собственные векторы и собственные значения.
3.	Матрица линейного оператора на пространстве, разложенном в прямую сумму инвариантных подпространств. <i>Цель и задачи изучения темы</i> – дать определение понятия матрицы линейного оператора на пространстве, разложенном в прямую сумму инвариантных подпространств. Рассмотреть на примере.
4.	Циклическое подпространство и аннуляторы вектора. <i>Цель и задачи изучения темы</i> – изучить циклическое подпространство и аннуляторы вектора. Привести пример циклического подпространства.
5.	Характеристический многочлен линейного оператора; матрица линейного оператора на циклическом подпространстве и ее характеристический многочлен. Теорема Гамильтона-Кэли. <i>Цель и задачи изучения темы</i> – дать определение характеристического многочлена линейного оператора и его матрицы на циклическом подпространстве. Сформулировать и доказать теорему Гамильтона-Кэли.
6.	Корневые векторы и корневые подпространства. <i>Цель и задачи изучения темы</i> – ввести понятия корневого вектора и корневого подпространства, а также методы его нахождения.
7.	Нильпотентные операторы. <i>Цель и задачи изучения темы</i> – дать определение понятия нильпотентные операторы, привести пример.
8.	Полиномиальные матрицы. Свойства. <i>Цель и задачи изучения темы</i> – ввести понятие полиномиальной матрицы и ее свойства. Изучить метод нахождения полиномиальной матрицы.
9.	Жорданова клетка. Жорданова нормальная форма матрицы линейного оператора в комплексном и вещественном пространстве. <i>Цель и задачи изучения темы</i> – изучить жорданову нормальную форму матрицы линейного оператора и жорданову клетку. Привести пример.
10.	Унитарные пространства. Свойства. <i>Цель и задачи изучения темы</i> – изучить основные понятия теории унитарных пространств и их свойства. Привести пример.
11.	Ортогональные и унитарные матрицы. <i>Цель и задачи изучения темы</i> – изучить ортогональные и унитарные матрицы, а также их свойства. Привести пример.
12.	Сопряженный оператор. Нормальные операторы. <i>Цель и задачи изучения темы</i> – изучить сопряженный и нормальный операторы, а также свойства, которыми они обладают.



13.	<p>Диагонализируемые операторы. Операторы простого спектра и простой структуры.</p> <p><i>Цель и задачи изучения темы</i> – ввести понятие диагонализируемых операторов, операторов простого спектра и простой структуры.</p>
14.	<p>Самосопряженные и симметрические операторы, их спектр.</p> <p><i>Цель и задачи изучения темы</i> – изучить самосопряженные и симметрические операторы, их свойства и спектр. Показать на примере.</p>
15.	<p>Унитарные и ортогональные операторы.</p> <p><i>Цель и задачи изучения темы</i> – изучить унитарные и ортогональные операторы и их свойства. Показать на примере.</p>
16.	<p>Аффинные пространства; аффинные системы координат. Плоскости в аффинном пространстве; их задание системами линейных уравнений. Взаимное расположение плоскостей в аффинном пространстве.</p> <p><i>Цель и задачи изучения темы</i> – изучить основные понятия теории аффинных пространств, а также плоскости в аффинном пространстве и их взаимное расположение.</p>
17.	<p>Общее понятие о тензорах; координаты тензора. Операции над тензорами; свертка и след.</p> <p><i>Цель и задачи изучения темы</i> – изучить основные понятия тензорного исчисления, а именно операции над тензорами, свертка и след. Привести пример.</p>

**Таблица 4. Практические занятия**

№ п/п	Тема
<b>3 семестр</b>	
1.	Линейные алгебры. Изоморфизм алгебр. Линейная алгебра линейных операторов.
2.	Инвариантные подпространства. Собственные значения и собственные векторы.
3.	Матрица линейного оператора на пространстве, разложенном в прямую сумму инвариантных подпространств
4.	Циклическое подпространство и аннуляторы вектора
5.	Характеристический многочлен линейного оператора; матрица линейного оператора на циклическом подпространстве и ее характеристический многочлен. Теорема Гамильтона-Кэли
6.	Корневые векторы и корневые подпространства
7.	Нильпотентные операторы
8.	Полиномиальные матрицы. Свойства.
9.	Жорданова клетка. Жорданова нормальная форма матрицы линейного оператора в комплексном и вещественном пространстве.
10.	Унитарные пространства. Свойства
11.	Ортогональные и унитарные матрицы
12.	Сопряженный оператор. Нормальные операторы
13.	Диагонализируемые операторы. Операторы простого спектра и простой структуры.
14.	Самосопряженные и сим-метрические операторы, их спектр
15.	Унитарные и ортогональные операторы
16.	Аффинные пространства; аффинные системы координат. Плоскости в аффинном

	пространстве; их задание системами линейных уравнений. Взаимное расположение плоскостей в аффинном пространстве.
17.	Общее понятие о тензорах; координаты тензора. Операции над тензорами; свертка и след

*Таблица 5. Лабораторные работы по дисциплине (модулю) – не предусмотрены*

*Таблица 6. Самостоятельное изучение разделов дисциплины (модуля)*

№ п/п	Вопросы, выносимые на самостоятельное изучение
1.	Жорданова нормальная форма.
2.	Ортогональное дополнение.
3.	Линейная алгебра многочленов над произвольным полем.
4.	Лемма Шура. Соотношение ортогональности для характеров. Разложение регулярного представления.
5.	Индукцированные представления. Определение и характер индуцированного представления. Формула взаимности Фробениуса.
6.	Теорема Брауэра. $p$ -элементарные группы и $p$ -регулярные элементы.
7.	Тензоры
8.	Коммутативные кольца. Идеалы в коммутативных кольцах с единицей.
9.	Универсальные алгебры. Алгебры. Тело кватернионов как Линейная алгебра с делением.
10.	Симметрические и линейные группы

## 5. Оценочные материалы для текущего и рубежного контроля успеваемости и промежуточной аттестации

Конечными результатами освоения программы дисциплины являются сформированные когнитивные дескрипторы «знать», «уметь», «владеть», расписанные по отдельным компетенциям. Формирование этих дескрипторов происходит в течение всего семестра по этапам в рамках различного вида занятий и самостоятельной работы.

В ходе изучения дисциплины предусматриваются **текущий, рубежный контроль и промежуточная аттестация.**

### 5.1. Оценочные материалы для текущего контроля.

*Цель текущего контроля* – оценка результатов работы в семестре и обеспечение своевременной обратной связи, для коррекции обучения, активизации самостоятельной работы обучающегося. Объектом текущего контроля являются конкретизированные результаты обучения (учебные достижения) по дисциплине.

*Текущий контроль успеваемости* – контроль, определяющий качество, глубину, объем усвоения знаний каждого раздела. Осуществляется преподавателем в ходе повседневной учебной работы и обеспечивает оценивание хода освоения дисциплины. Формы проведения текущего контроля: проверка выполнения домашних заданий; проведение контрольных и тестовых работ с целью проверки практических умений по отдельным темам; ответы на теоретические вопросы на практическом занятии, решение практических задач и выполнение заданий на практическом занятии.

Оценка качества подготовки на основании выполненных заданий ведется преподавателем (с обсуждением результатов), баллы начисляются в зависимости от сложности задания

**5.1.1. Вопросы по темам дисциплины «Линейная алгебра» (контролируемая компетенция ОПК-1)**

**3 семестр**

**Тема 1. Линейные алгебры, Линейная алгебра линейных операторов, матрица линейного оператора.**

1. Линейные операторы и функционалы. Умножение линейных операторов.
2. Многочлен от линейного оператора. Вырожденные и невырожденные операторы.
3. Линейные алгебры. Изоморфизм алгебр. Линейная алгебра линейных операторов.
4. Инвариантные подпространства. Собственные значения и собственные векторы.
5. Матрица линейного оператора на пространстве, разложенном в прямую сумму инвариантных подпространств.

**Тема 2. Циклическое подпространство. Характеристический многочлен линейного оператора. Корневые векторы, нильпотентные операторы**

1. Циклическое подпространство и аннуляторы вектора
2. Характеристический многочлен линейного оператора; матрица линейного оператора на циклическом подпространстве и ее характеристический многочлен.
3. Теорема Гамильтона-Кэли.
4. Корневые векторы и корневые подпространства
5. Нильпотентные операторы

**Тема 3. Полиномиальные матрицы.**

1. Полиномиальные матрицы. Свойства
2. Жорданова клетка.
3. Жорданова нормальная форма матрицы линейного оператора в комплексном и вещественном пространстве.

**Тема 4. Сопряженный оператор, унитарные и ортогональные операторы.**

1. Унитарные пространства. Свойства.
2. Ортогональные и унитарные матрицы.
3. Сопряженный, нормальный, унитарный и ортогональный операторы.
4. Диагонализируемые операторы. Операторы простого спектра и простой структуры.
5. Самосопряженные и симметрические операторы, их спектр

**Тема 5. Аффинные пространства, плоскости в аффинном пространстве. Тензоры.**

1. Аффинные (точечные) пространства; аффинные системы координат.
2. Плоскости в аффинном пространстве; их задание системами линейных уравнений
3. Взаимное расположение плоскостей в аффинном пространстве.
4. Общее понятие о тензорах; координаты тензора
5. Операции над тензорами; свертка и след

### Критерии формирования оценок (оценивания) устного опроса

Устный опрос является одним из основных способов учёта знаний обучающегося. Развёрнутый ответ студента должен представлять собой связное, логически последовательное сообщение на заданную тему, показывать его умение применять определения.

**В результате устного опроса знания, обучающегося оцениваются по следующей шкале (за 1 занятие):**

**2 балла** ставится, если обучающийся:

- 1) полно излагает изученный материал, даёт правильные определения понятий;
- 2) обнаруживает понимание материала, может обосновать свои суждения, применить знания на практике;
- 3) излагает материал последовательно и правильно с точки зрения норм литературного языка.

**1 балл** ставится, если обучающийся:

- 1) излагает материал неполно и допускает неточности в определении понятий;
- 2) не умеет достаточно глубоко и доказательно обосновать свои суждения;
- 3) излагает материал непоследовательно.

**0 баллов** ставится, если обучающийся обнаруживает незнание большей части соответствующего раздела изучаемого материала, допускает ошибки в формулировке.

Баллы могут ставиться не только за единовременный ответ, но и за сумму ответов, данных студентом на протяжении занятия

### 5.1.2. Оценочные материалы для самостоятельной работы обучающегося (типовые задачи) (контролируемая компетенция ОПК-1)

Перечень типовых задач для самостоятельной работы сформирован в соответствии с тематикой практических занятий по дисциплине «Линейная алгебра».

#### **Задачи**

#### **3 семестр**

**Тема 1. Линейные алгебры, Линейная алгебра линейных операторов, матрица линейного оператора.**

1. Если линейные операторы  $\varphi$  и  $\psi$  заданы соответственно матрицами  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ , то найти матрицу оператора  $\varphi\psi$ .
2. Вычислить размерность пространства линейных операторов, действующих в 3-мерном пространстве.
3. Найти собственное значение оператора поворота плоскости векторов на угол  $\pi(2k+1)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .
4. Привести матрицу  $A$  линейного оператора к диагональному виду и найти соответствующий базис, если

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Линейный оператор  $A$  задан в некотором базисе матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы оператора  $A^{-1}$  – оператора, обратного к  $A$ .

6. Доказать, что если оператор  $\mathcal{A}$  вырожден, то любое подпространство, содержащее его образ, будет инвариантно относительно оператора  $\mathcal{A}$ .
7. Доказать, что если оператор  $\mathcal{A}$  невырожден, то  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{A}^{-1}$  имеют одни и те же инвариантные подпространства.
8. Найти все линейные подпространства пространства многочленов от одного неизвестного степени  $\leq n$  с вещественными коэффициентами, инвариантные относительно преобразования  $\varphi$ , переводящего любой многочлен в его производную.
9. Пусть операторы  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  перестановочны; доказать, что образ и ядро оператора  $\mathcal{B}$  инвариантны относительно оператора  $\mathcal{A}$ .
10. Найти собственные значения и собственные векторы линейных преобразований, заданных в некотором базисе матрицей  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

*Методические рекомендации по решению задач.*

Приступая к самостоятельному решению задач, необходимо внимательно прочесть теоретический материал по соответствующему вопросу темы. Важнейшие понятия этой темы: линейные операторы и операции над ними, вырожденные и невырожденные операторы, линейные алгебры, изоморфизм алгебр, инвариантные подпространства, собственные значения и собственные векторы и др. Эти понятия следует выучить и разобраться в их соотношениях. При решении задач используются формулы, объяснение которых представлено в теме 1.

## **Тема 2. Циклическое подпространство. Характеристический многочлен линейного оператора. Корневые векторы, нильпотентные операторы**

1. Найти матрицу оператора  $f(\varphi)$ , где  $f(t) = 3t^2 - 2t + 5$ , заданного матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

2. Найти минимальный аннулятор  $f_{e_3}(t)$  вектора  $e_3$ , если линейный оператор  $\varphi$  в

$$\text{базисе } e_1, e_2, e_3 \text{ задан матрицей } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Найти характеристический многочлен оператора поворота векторов плоскости на угол  $\alpha$ .

4. Линейное преобразование  $\varphi$  в базисе  $e_1, e_2, e_3$  задано матрицей  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Найти минимальный многочлен  $g(t)$  этого преобразования.

5. Проверить теорему Гамильтона – Кэли для матрицы  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

6. Линейный оператор  $\mathcal{A}$  в базисе  $e_1, e_2, e_3$  задан матрицей  $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -5 & 7 & -5 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix}$ . Найти минимальный многочлен  $g(\lambda)$  этого оператора.
7. Доказать, что: а) образ  $\varphi L$  и б) полный прообраз  $\varphi^{-1}L$  линейного подпространства  $L$ , инвариантного относительно линейного преобразования  $\varphi$ , сами будут инвариантны относительно  $\varphi$ .
8. Найти собственные значения и собственные векторы линейного преобразования, являющегося дифференцированием многочленов степени  $\leq n$  с вещественными коэффициентами.
9. Доказать, что операторы  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{A} - \lambda E$ , где  $\lambda$  – любое число, имеют одни и те же инвариантные подпространства.
10. Доказать, что если оператор  $\mathcal{A}$  невырожден, то  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{A}^{-1}$  имеют одни и те же инвариантные подпространства.

*Методические рекомендации по решению задач.*

Приступая к самостоятельному решению задач, необходимо внимательно прочесть теоретический материал по соответствующему вопросу темы. Важнейшие понятия этой темы: циклическое подпространство и аннуляторы вектора, характеристический многочлен и матрица линейного оператора, теорема Гамильтона-Кэли, корневые векторы и корневые подпространства, нильпотентные операторы и др. Эти понятия следует выучить и разобраться в их соотношениях. При решении задач используются формулы, объяснение которых представлено в теме 2.

**Тема 3. Полиномиальные матрицы.**

1. Привести  $\lambda$ -матрицу  $A = \begin{pmatrix} \lambda + 2 & 1 \\ 0 & \lambda + 2 \end{pmatrix}$  к каноническому виду.
2. Записать жорданову клетку 3-го порядка, относящуюся к числу 3
3. Найти жорданову нормальную форму матрицы  $A$ , если канонический вид характеристической матрицы  $A - \lambda E$  имеет вид  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 - 1 \end{pmatrix}$ .
4. Привести к каноническому виду  $\lambda$ -матрицу  $A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^2 - 1 & \lambda + 1 \\ \lambda + 1 & \lambda^2 + 2\lambda + 1 \end{pmatrix}$ .
5. Привести матрицу  $A$  к жордановой нормальной форме  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .
6. Написать жорданову форму  $A_j$  матрицы  $A$ , если даны инвариантные множители  $E_i(\lambda) (i = 1, 2, \dots, n)$  ее характеристической матрицы  $A - \lambda E$ :  
 $E_1(\lambda) = E_2(\lambda) = 1, E_3(\lambda) = E_4(\lambda) = \lambda - 1, E_5(\lambda) = E_6(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2).$
7. Найти жорданову форму матрицы  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .
8. Доказать, что если в  $E_n$  равенство  $(a, x) = (b, x)$  справедливо  $\forall x \in E_n$ , то  $a = b$ .
9. Найти размерность подпространства, образованного векторами  $x$ , для которых  $(a, x) = 0$ , где  $a$  – фиксированный вектор пространства  $E$ .
10. Доказать, что в унитарном пространстве выполняется неравенство треугольника

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

*Методические рекомендации по решению задач.*

Приступая к самостоятельному решению задач, необходимо внимательно прочесть теоретический материал по соответствующему вопросу темы. Важнейшие понятия этой темы: полиномиальные матрицы и их свойства, жорданова клетка, жорданова нормальная форма матрицы линейного оператора и др. Эти понятия следует выучить и разобраться в их соотношениях. При решении задач используются формулы, объяснение которых представлено в теме 3.

**Тема 4. Сопряженный оператор, унитарные и ортогональные операторы.**

1. Найти длину вектора  $x = (-3, 2i)$ , если в унитарном пространстве  $C^2$  скалярное произведение векторов  $x = (\alpha_1, \alpha_2)$  и  $y = (\beta_1, \beta_2)$  определено равенством  $(x, y) = 2\alpha_1\bar{\beta}_1 + \alpha_2\bar{\beta}_2$ .
2. Найти в унитарном пространстве  $C^3$  длину  $|x|$  вектора  $x = (x_1, x_2, x_3)$ .
3. Определить нормирующий множитель вектора  $a = (1, i, 1 + i)$  унитарного пространства  $C^3$ .
4. Найти матрицу сопряженного оператора  $\varphi^*$ , если  $\varphi$  - оператор поворота векторов плоскости на угол  $180^\circ$ .
5. Найти скалярное произведение  $(Ax, Ax)$  для любого вектора  $x$ , где  $A$  - унитарный оператор.
6. Применяя процесс ортогонализации, построить ортогональный базис подпространства, натянутого на систему векторов  $(1, 2, 2, -1), (1, 1, -5, 3), (3, 2, 8, -7)$ .
7. Доказать, что в унитарном пространстве справедлива теорема Пифагора: если  $x, y$  - ортогональны, то  $|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2$ .
8. Найти ортогональную проекцию  $u$  и ортогональную составляющую  $z$  вектора  $x$  на линейное подпространство  $L$  если  $x = (4, -1, -3, 4)$ .  $L$  натянуто на векторы  $a_1 = (1, 1, 1, 1), a_2 = (1, 2, 2, -1), a_3 = (1, 0, 0, 3)$ .
9. Как выглядит и чему равен определитель Грамма  $G(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , если система векторов  $x_1, x_2, \dots, x_n$  - ортогональна;
10. Найти матрицу линейного оператора  $\varphi^*$ , сопряженного оператору  $\varphi$  в ортонормированном базисе  $e_1, e_2, e_3$ , если  $\varphi$  переводит векторы  $a_1 = (0, 0, 1), a_2 = (0, 1, 1), a_3 = (1, 1, 1)$  в векторы  $b_1 = (1, 2, 1), b_2 = (3, 2, 1), b_3 = (7, -1, 4)$ .

*Методические рекомендации по решению задач.*

Приступая к самостоятельному решению задач, необходимо внимательно прочесть теоретический материал по соответствующему вопросу темы. Важнейшие понятия этой темы: унитарные пространства и их свойства, ортогональные и унитарные матрицы, сопряженный, нормальный, унитарный, ортогональный самосопряженный и симметрические операторы и др. Эти понятия следует выучить и разобраться в их соотношениях. При решении задач используются формулы, объяснение которых представлено в теме 4.

**Тема 5. Аффинные пространства, плоскости в аффинном пространстве. Тензоры.**

1. Чему равна размерность плоскости в  $n$  - мерном аффинном пространстве, состоящем из одной точки.

2. Пусть  $A$  – тензора типа  $(p, q)$ , у которого  $p \neq 0$  и  $q \neq 0$ . Найти тензор, который получается в результате свертывания тензора  $A$ .
  3. Какого типа является метрический тензор  $g^{ij}$ .
  4. Записать матрицу преобразования  $A_{ij}$  при повороте на угол  $\varphi$ 
    - а) вокруг оси  $Ox$ ;
    - б) вокруг оси  $Oy$ ;
    - в) вокруг оси  $Oz$ .
- Записать матрицу обратного преобразования.
5. Доказать, что при поворотах декартовой системы координат определитель матрицы поворота равен  $+1$ .
  6. Показать, что единственным “изотропным” вектором (компоненты которого одинаковы во всех системах координат) является нулевой вектор.
  7. Доказать, что сумма  $\alpha \cdot A_{ij} + \beta \cdot B_{ij}$  представляет собой компоненты тензора второго ранга, если известно, что  $A_{ij}$  и  $B_{ij}$  – тензоры второго ранга, а  $\alpha$  и  $\beta$  – скаляры.
  8. Даны три вектора  $A_i, B_j, C_k$ . Построить зависящие от них
    - а) инварианты;
    - б) тензор II-го ранга;
    - в) симметричный тензор III-го ранга.
  9. В некотором базисе известны два вектора  $A = \{1, 2, -1\}$  и  $B = \{3, 2, 4\}$ . Из компонент этих векторов построить симметричный и антисимметричный тензоры второго ранга.
  10. Показать в общем виде, что свертка симметричного и антисимметричного тензоров равна нулю.

#### *Методические рекомендации по решению задач.*

Приступая к самостоятельному решению задач, необходимо внимательно прочесть теоретический материал по соответствующему вопросу темы. Важнейшие понятия этой темы: аффинные пространства и системы координат, тензоры и операции над ними, свертка, след и др. Эти понятия следует выучить и разобраться в их соотношениях. При решении задач используются формулы, объяснение которых представлено в теме 5.

#### ***Критерии формирования оценок по заданиям для самостоятельной работы студента (типовые задачи):***

«отлично» (3 балла) - обучающийся показал глубокие знания материала по поставленным вопросам, грамотно и логично его излагает. Свободно использует необходимые формулы при решении задач;

«хорошо» (2 балла) - обучающийся твердо знает материал, грамотно его излагает, но допускает неточности в процессе решения задач;

«удовлетворительно» (1 балл) - обучающийся имеет знания основного материала по поставленным вопросам, но не усвоил его деталей, допускает отдельные неточности при решении задач;

«неудовлетворительно» (0 баллов) – обучающийся допускает грубые ошибки в ответе на поставленные вопросы и при решении задач.

#### **5.2. Оценочные материалы для рубежного контроля.**

Рубежный контроль осуществляется по более или менее самостоятельным разделам – учебным модулям курса и проводится по окончании изучения материала модуля в заранее установленное время. Рубежный контроль проводится с целью определения качества усвоения материала учебного модуля в целом. В течение семестра проводится три таких контрольных мероприятия по графику.



В качестве форм рубежного контроля можно использовать тестирование (письменное или компьютерное), проведение коллоквиума или контрольных работ. На рубежные контрольные мероприятия рекомендуется выносить весь программный материал (все разделы) по дисциплине.

**Контрольная работа.** Контрольная работа – письменная работа небольшого объема, предполагающая проверку знаний заданного к изучению материала и навыков его практического применения. Проводится три раза в течение изучения дисциплины (семестр) в часы аудиторной работы. Не менее чем за 1 неделю до контрольной работы, преподаватель должен определить студентам исходные данные для подготовки: назвать разделы (темы, вопросы), по которым будут контрольные задания, теоретические источники для подготовки.

Контрольные работы могут состоять из одного или нескольких заданий практического и теоретического содержания. При выполнении контрольной работы пользоваться конспектами лекций, учебниками, задачками не разрешено. Длительность решения контрольных заданий составляет не более 90 минут.

### **5.2.1. Оценочные материалы для контрольной работы: контролируемая компетенция ОПК-1.**

#### **Типовые варианты контрольных работ:**

##### **Вариант 1**

1. Найти все линейные подпространства пространства многочленов от одного неизвестного степени  $\leq n$  с вещественными коэффициентами, инвариантные относительно преобразования  $\varphi$ , переводящего любой многочлен в его производную.
2. Линейный оператор  $\mathcal{A}$  в базисе  $e_1, e_2, e_3$  задан матрицей  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Найти минимальный многочлен  $g(\lambda)$  этого оператора.
3. Пусть  $x$  – корневой вектор оператора  $\mathcal{A}$ , относящийся к собственному значению  $\lambda_i$  и имеющий высоту  $h > 0$ . Доказать, что вектор  $(\mathcal{A} - \lambda_i E)x$  имеет высоту  $h - 1$ .
4. Найти собственные значения и корневые подпространства линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Доказать, что линейное преобразование комплексного пространства тогда и только тогда имеет диагональную матрицу в некотором базисе, когда все его корневые векторы являются собственными векторами.

##### **Вариант 2**

1. Привести  $\lambda$  – матрицу к нормальной диагональной форме путем элементарных преобразований  $\begin{pmatrix} \lambda + 1 & \lambda^2 + 1 & \lambda^2 \\ 3\lambda & 3\lambda^2 - 1 & \lambda^2 + 2\lambda \\ \lambda - 1 & \lambda^2 - 1 & \lambda \end{pmatrix}$ .

2. Написать жорданову форму  $A_J$  матрицы  $A$ , если даны инвариантные множители  $E_i(\lambda) (i = 1, 2, \dots, n)$  ее характеристической матрицы  $A - \lambda E$ , если  $E_1(\lambda) = E_2(\lambda) = E_3(\lambda) = 1$ ,  $E_4(\lambda) = \lambda + 1$ ,  $E_5(\lambda) = (\lambda + 1)^2$ ,  $E_6(\lambda) = (\lambda + 1)^2(\lambda - 5)$ .
3. Ввести скалярное произведение в пространстве  $R[x]_n$  многочленов степени  $\leq n$  с действительными коэффициентами.
4. Применяя процесс ортогонализации, построить ортогональный базис подпространства, натянутого на систему векторов  $(1, 2, 2, -1), (1, 1, -5, 3), (3, 2, 8, -7)$ .
5. Доказать, что векторы  $x, y$  унитарного пространства ортогональны тогда и только, когда  $|\alpha x + \beta y|^2 = |\alpha x|^2 + |\beta y|^2$ .

***Критерии формирования оценок по контрольным точкам (контрольные работы)***

**4 балла** - правильно выполнены все задания, продемонстрирован высокий уровень владения материалом, проявлены превосходные способности применять знания и умения к выполнению конкретных заданий.

**3 балла** - правильно выполнена большая часть заданий, присутствуют незначительные ошибки, продемонстрирован хороший уровень владения материалом, проявлены средние способности применять знания и умения к выполнению конкретных заданий.

**2 балла** - задания выполнены более чем наполовину, присутствуют серьезные ошибки, продемонстрирован удовлетворительный уровень владения материалом, проявлены низкие способности применять знания и умения к выполнению конкретных заданий.

**1 балл** - дан неполный ответ, представляющий собой разрозненные знания по теме вопроса существенными ошибками в определениях.

**0 баллов** - при полном несоответствии всем критериям и отсутствии ответа.

**5.2.2. Оценочные материалы: Типовые тестовые задания по дисциплине «Линейная алгебра» (контролируемая компетенция ОПК-1):**

**Полный перечень тестовых заданий представлен в ЭОИС -**

<http://open.kbsu.ru/moodle/course/view.php?id=1179>

*Тест* – система стандартизированных заданий, позволяющая автоматизировать процедуру измерения уровня знаний и умений студента. Тестирование проводится три раза в течение изучения дисциплины (семестр). Не менее, чем за 1 неделю до тестирования, преподаватель должен определить студентам исходные данные для подготовки к тестированию: назвать разделы (темы, вопросы), по которым будут задания в тестовой форме, теоретические источники (с точным указанием разделов, тем, статей) для подготовки. Оценка результатов тестирования производится компьютерной программой, результат выдается немедленно по окончании теста.

1. Дефект невырожденного линейного преобразования...

+: равен 0

-: равен 1

-: не равен 0

-: не равен 1

базисе матрицей  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

$$-: 2, 1 \qquad -: \sqrt{3}, -\sqrt{3}$$

$$\text{:- } b_1 = (2, 1, 3, -1), b_2 = (1, 1, 3, 1) \qquad \text{:- } b_1 = (2, 1, 3, -1), b_2 = (5, 2, 0, 1)$$

4. Линейное преобразование  $\varphi$  задано матрицей  $A\varphi = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 0 \\ a & -7 & 7 \end{pmatrix}$ . При каком значении

$$+ : a=6 \qquad - : a=1 \qquad - : a=2 \qquad - : a=-6$$

$$\neg: \varphi x = b, b \in V, b \neq 0 \neg: \varphi x = \lambda x + a, \lambda \in P, a \in V, a \neq 0$$

-: размерность пространства  $S$                   -: размерность  $\dim \ker \varphi$

$\vdash$ : оператор подобия                  -: оператор с ненулевым ядром

$+$ : ассоциативной                       $-$ : неассоциативной

$$\begin{array}{llll} \therefore x \in \ker \varphi & +: x = \overline{0} & \therefore x \notin \ker \varphi & \therefore x \neq 0 \end{array}$$
$$\begin{array}{llll} \vdash: Jm\phi = L & \vdash: L \subset Jm\phi & \vdash: \phi L \subseteq L & \vdash: \phi L = S \end{array}$$

11. Число различных собственных значений единичного оператора  $n$ -мерного пространства равно

+: 1                      -:  $n$                       -:  $n - 1$

12. Циклическое подпространство  $L = \langle x, \varphi x, \dots, \varphi^{k-1} x \rangle$

+: инвариантно относительно  $\varphi$  -: не инвариантно относительно  $\varphi$

+: подпространством размерности  $k - 1$  -: подпространством размерности  $k + 1$

13. Характеристический многочлен оператора поворота векторов плоскости на угол  $\alpha$  равен

+:  $\lambda^2 - (\cos \varphi)\lambda - 1$                       -:  $\lambda^2 - 2(\cos \varphi)\lambda + \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi$

+:  $\lambda^2 - 2(\cos \varphi)\lambda + 1$                       -:  $\lambda^2 + 2(\cos \varphi)\lambda + 1$

14. Корневые векторы, относящиеся к различным собственным значениям являются

+: линейно зависимыми

+: линейно независимыми

+: собственными векторами

+: коллинеарными векторами

15. Привести  $\lambda$ -матрицу  $A = \begin{pmatrix} \lambda + 2 & 0 \\ 1 & \lambda + 2 \end{pmatrix}$  к каноническому виду

+:  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\lambda + 2)^2 \end{pmatrix}$                       -:  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -(\lambda + 2)^2 \end{pmatrix}$

+:  $\begin{pmatrix} \lambda + 2 & 0 \\ 0 & (\lambda + 2)^2 \end{pmatrix}$                       -:  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda + 2 \end{pmatrix}$

16. Вещественная матрица  $Q$  является ортогональной, если:

+:  $Q^T = Q$                       -:  $Q^T Q^{-1} = E$

+:  $Q^T = Q^{-1}$

+:  $Q^{-1} Q^T = E$

17. Оператор  $A$  в унитарном пространстве является нормальным, если он:

+: перестановочен со своим сопряженным  $A^*$

+:  $A \neq A^*$

+:  $A^{-1} \neq A^*$

+:  $A^* \neq E$ , где  $E$  - единичный оператор

18. Для тензора  $A$  типа  $(p, q)$  число  $r = p + q$  называется ... тензора.

+: дефектом                      -: индексом

+: рангом                      -: порядком

### ***Критерии формирования оценок по тестовым заданиям:***

По итогам выполнения тестовых заданий оценка производится по пятибалльной шкале.

(5 баллов) – получают обучающиеся с правильным количеством ответов на тестовые вопросы. Выполнено 89-100 % предложенных тестовых вопросов;

(4 балла) – получают обучающиеся с правильным количеством ответов на тестовые вопросы – 70 –88 % от общего объема заданных тестовых вопросов;

(3 балла) – получают обучающиеся с правильным количеством ответов на тестовые вопросы – 50 –69% от общего объема заданных тестовых вопросов;

(2 балла) – получают обучающиеся правильным количеством ответов на тестовые вопросы – 30-49 % от общего объема заданных тестовых вопросов.

(1 балл) – получают обучающиеся с правильным количеством ответов на тестовые вопросы – 10 –29% от общего объема заданных тестовых вопросов;

(0 баллов) – получают обучающиеся правильным количеством ответов на тестовые вопросы – менее 10 % от общего объема заданных тестовых вопросов.

### ***5.2.3 Оценочные материалы для проведения коллоквиума (контролируемая компетенция ОПК-1)***

Коллоквиум – собеседование преподавателя с обучающимся с целью контроля глубины усвоения теоретического материала, изучения рекомендованной литературы. Коллоквиум - это форма контроля, вид помощи обучающимся и метод стимулирования их самостоятельной работы. Коллоквиум охватывает только раздел или тему изучаемой дисциплины.

#### ***Темы коллоквиума за третий семестр:***

1. Линейные операторы. Матрица линейного оператора.
2. Умножение линейных операторов. Многочлен от линейного оператора.
3. Вырожденные и невырожденные линейные операторы.
4. Линейные алгебры. Изоморфизм алгебр.
5. Характеристический многочлен линейного оператора. Теорема Гамильтона-Кэли.
6. Корневые векторы и корневые подпространства.
7. Нильпотентные операторы, их свойства.
8. Инвариантные подпространства относительно нильпотентного оператора.
9. Нильпотентная Жорданова клетка. Каноническая Жорданова форма матрицы линейного оператора.
10.  $\lambda$  - матрица. Теорема о канонической -матрице.
11. Приведение матрицы к жорданово нормальной форме.
12. Унитарные пространства, их свойства. Неравенство Коши-Буняковского для унитарных пространств.
13. Ортогональные и унитарные матрицы.
14. Сопряженный оператор; существование и единственность.
15. Теорема о собственных значениях самосопряженного оператора.
16. Теорема о собственных векторах нормального оператора.
17. Операторы простой структуры, их диагонализируемость.
18. Унитарные операторы. Критерий унитарности линейного оператора. Теорема о матрице унитарного оператора. Критерий унитарности нормального оператора.
19. Ортогональные операторы. Критерий ортогональности линейного оператора.
20. Плоскость в аффинном пространстве; их задание системами линейных уравнений.

### ***Критерии формирования оценок по контрольным точкам (коллоквиум)***

«отличный (высокий) уровень компетенции» (5 баллов) - ставится в случае, когда обучающийся демонстрирует знание теоретического материала на 100%;

«хороший (нормальный) уровень компетенции» (4 баллов) - ставится в случае, когда обучающийся демонстрирует знание теоретического материала на 70%;

«удовлетворительный (минимальный, пороговый) уровень компетенции» (3 балла) – ставится в случае, когда обучающийся затрудняется с правильной формулировкой теоретического материала, дает неполный ответ, демонстрирует знание теоретического материала на 50%;

«неудовлетворительный (ниже порогового) уровень компетенции» (2 и менее баллов) – ставится в случае, когда обучающийся дает неверную формулировку теоретического материала, дает неверный ответ, демонстрирует незнание теоретического материала или знание материала менее чем на 40% задач.

### **5.3. *Оценочные материалы для промежуточной аттестации.***

Целью промежуточной аттестации по дисциплине является оценка качества освоения дисциплины обучающимися. Она предназначена для объективного подтверждения и оценивания достигнутых результатов обучения после завершения изучения дисциплины. Осуществляется в конце семестра и представляет собой итоговую оценку знаний в виде проведения экзамена.

Промежуточная аттестация может проводиться в устной или письменной форме. На промежуточную аттестацию отводится до 30 баллов.

### ***ВОПРОСЫ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЭКЗАМЕН***

***(контролируемая компетенция ОПК-1):***

#### ***3 семестр.***

1. Линейные операторы. Матрица линейного оператора.
2. Пространства функций. Двойственное линейное пространство.
3. Пространство линейных операторов.
4. Умножение линейных операторов. Многочлен от линейного оператора.
5. Вырожденные и невырожденные линейные операторы.
6. Линейные алгебры. Изоморфизм алгебр.
7. Линейная алгебра линейных операторов.
8. Инвариантные подпространства.
9. Инвариантность ядра и образа линейного оператора.
10. Собственные значения и собственные векторы.
11. Матрица линейного оператора на пространстве разложенном в прямую сумму подпространств.
12. Циклическое подпространство.
13. Аннуляторы вектора.
14. Характеристический многочлен линейного оператора.
15. Матрица линейного оператора на циклическом подпространстве.
16. Теорема Гамильтона-Кэли.
17. Корневые векторы и корневые подпространства.
18. Нильпотентные операторы, их свойства.
19. Нильпотентная Жорданова клетка.
20. Каноническая Жорданова форма матрицы линейного оператора.

21.  $\lambda$  - матрица. Теорема о канонической-матрице.
22. Основная теорема о подобии матриц; связь с характеристическими матрицами.
23. Жорданова нормальная форма.
24. Приведение матрицы к жорданово нормальной форме.
25. Унитарные пространства, их свойства.
26. Неравенство Коши-Буняковского для унитарных пространств.
27. Ортогональные и унитарные матрицы.
28. Сопряженный оператор; существование и единственность.
29. Теорема о произведении самосопряженных операторов.
30. Теорема о собственных значениях самосопряженного оператора.
31. Нормальные операторы. Способ получения бесконечной серии нормальных операторов.
32. Теорема о собственных векторах нормального оператора.
33. Диагонализируемые операторы.
34. Операторы простой структуры, их диагонализируемость.
35. Унитарные операторы. Критерий унитарности линейного оператора.
36. Теорема о матрице унитарного оператора.
37. Критерий унитарности нормального оператора.
38. Ортогональные операторы. Критерий ортогональности линейного оператора.
39. Аффинные (точечные) пространства; аффинные системы координат.
40. Плоскость в аффинном пространстве; их задание системами линейных уравнений.

***Критерии формирования оценок по промежуточной аттестации:***

26-30 баллов – получают обучающиеся, которые свободно ориентируются в материале и отвечают без затруднений. Обучающийся способен к выполнению сложных заданий, постановке целей и выборе путей их реализации. Работа выполнена полностью без ошибок, решено 100% заданий;

21-25 баллов – получают обучающиеся, которые относительно полно ориентируются в материале, отвечают без затруднений, допускают незначительное количество ошибок. Обучающийся способен к выполнению сложных заданий. Работа выполнена полностью, но имеются не более одной негрубой ошибки и одного недочета, не более трех недочетов. Допускаются незначительные неточности при решении задач, решено 70% заданий;

16-20 баллов – получают обучающиеся, у которых недостаточно высок уровень владения материалом. В процессе ответа на экзамене допускаются ошибки и затруднения при изложении материала. Обучающийся правильно выполнил не менее 2/3 всей работы или допустил не более одной грубой ошибки и двух недочетов, не более одной грубой и одной негрубой ошибки, не более трех негрубых ошибок, одной негрубой. Обучающийся затрудняется с правильной оценкой предложенной задачи, дает неполный ответ, решено 55% заданий;

0-15 баллов – получают обучающиеся, которые допускают значительные ошибки. Обучающийся имеет лишь начальную степень ориентации в материале. В работе число ошибок и недочетов превысило норму для оценки 3 или правильно выполнено менее 2/3 всей работы. Обучающийся дает неверную оценку ситуации, решено менее 50% заданий.

## **6. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

Максимальная сумма (100 баллов), набираемая студентом по дисциплине включает две составляющие:

- *первая составляющая* – оценка регулярности, своевременности и качества выполнения студентом учебной работы по изучению дисциплины в течение периода изучения дисциплины (семестра, или нескольких семестров) (сумма – не более 70 баллов). Баллы, характеризующие успеваемость студента по дисциплине, набираются им в течение всего периода обучения.
- *вторая составляющая* – оценка знаний студента по результатам промежуточной аттестации (не более 30 –баллов).

Критерием оценки уровня сформированности компетенций в рамках учебной дисциплины «Линейная алгебра» в третьем семестре – экзамен.

Общий балл текущего и рубежного контроля складывается из составляющих приложения 2.

***Целью промежуточных аттестаций*** по дисциплине является оценка качества освоения дисциплины обучающимися.

### ***Критерии оценки качества освоения дисциплины***

***Оценка «отлично»– от 91 до 100 баллов*** – теоретическое содержание курса освоено полностью, без пробелов, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы. Все предусмотренные программой обучения учебные задания выполнены. На экзамене студент демонстрирует глубокие знания предусмотренного программой материала, умеет четко и логически последовательно отвечать на поставленные вопросы.

***Оценка «хорошо» – от 81 до 90 баллов*** – теоретическое содержание курса освоено, необходимые практические навыки работы сформированы, выполненные учебные задания содержат незначительные ошибки. На экзамене студент демонстрирует твердое знание основного (программного) материала, есть несущественные неточности при ответе на поставленные вопросы.

***Оценка «удовлетворительно» – от 61 до 80 баллов*** – теоретическое содержание курса освоено не полностью, необходимые практические навыки работы сформированы частично, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. На экзамене студент демонстрирует знание только основного материала, ответы содержат неточности, слабо аргументированы, нарушена последовательность изложения материала

***Оценка «неудовлетворительно» – от 36 до 60 баллов*** – теоретическое содержание курса не освоено, необходимые практические навыки работы не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки, дополнительная самостоятельная работа над материалом курса не приведет к существенному повышению качества выполнения учебных заданий. На экзамене студент демонстрирует незнание значительной части программного материала, существенные ошибки в ответах на вопросы, неумение ориентироваться в материале, незнание основных понятий дисциплины.

Типовые задания, обеспечивающие формирование компетенций контролируемая компетенция ОПК-1 представлены в таблице 7



**Таблица 7. Результаты освоения учебной дисциплины, подлежащие проверке**

Код и наименование компетенции	Основные показатели оценки результатов обучения	Индикаторы достижения компетенции (для планирования результатов обучения по элементам образовательной программы и соответствующих оценочных средств)	Вид оценочного материала, обеспечивающие формирование компетенций
<p><b>ОПК-1</b> Способен находить, формулировать и решать актуальные и значимые проблемы фундаментальной математики и механики</p>	<p><b>Знать</b> базовые понятия в области математики и их профессиональную терминологию.</p> <p><b>Уметь</b> исследовать классические задачи в области математика и публично докладывать и объяснять фундаментальные результаты в соответствующих разделах математики</p> <p><b>Владеть</b> навыками математического мышления и строгого доказательства утверждений в области математики, а также методологией решения основных задач соответствующих разделов математики.</p>	<p><b>ИД- ОПК 1.1</b> Способен использовать при решении профессиональных задач знания, получения при изучении дисциплин математических и (или) естественных наук</p> <p><b>ИД- ОПК 1.2.</b> Способен использовать существующие математические методы при решении задач профессиональной деятельности</p>	<p>Типовые оценочные материалы для устного опроса (<i>раздел 5.1.1</i>)</p> <p>Оценочные материалы для самостоятельной работы (<i> типовые задачи раздел 5.1.2.</i>)</p> <p>Оценочные материалы для контрольной работы (<i>раздел 5.2.1</i>)</p> <p>Типовые тестовые задания (<i>раздел 5.2.2</i>)</p> <p>Оценочные материалы для проведения коллоквиума (<i>раздел 5.2.3</i>)</p> <p>Типовые оценочные материалы к экзамену (<i>раздел 5.3.</i>)</p>

## 7. Учебно – методическое обеспечение дисциплины

### 7.1. Нормативно-законодательные акты

1. Гражданский кодекс РФ: [электронный ресурс]// Доступ из справочной системы "Гарант". <http://www.garantexpress.ru>.
2. Приказ Министерства образования и науки РФ от 10 января 2018 г. № 16 «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта высшего образования - специалитет по специальности 01.05.01 Фундаментальные математика и механика» – Режим доступа: URL: <https://www.garant.ru/products/ipo/prime/doc/71773266/>
- 3.Федеральный закон "Об образовании в Российской Федерации" от 29.12.2012 № 273-ФЗ [http://www.consultant.ru/document/cons\\_doc\\_LAW\\_140174/](http://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_140174/)

## 7.2. Основная литература.

4. Ахметгалиева В.Р. Математика. Линейная Линейная алгебра [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Ахметгалиева В.Р., Галяутдинова Л.Р., Галяутдинов М.И.— Электрон. текстовые данные.— М.: Российский государственный университет правосудия, 2017.— 60 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/65863.html>.
5. Бабин, А.И. Линейная Линейная алгебра : учебное пособие / А.И. Бабин, А.В. Дягилева. — Кемерово : КузГТУ имени Т.Ф. Горбачева, 2018. — 116 с. — ISBN 978-5-906969-60-6. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система «Лань» : [сайт]. — URL: <https://e.lanbook.com/book/105427>
6. Мальцев, И. А. Линейная Линейная алгебра : учебное пособие для спо / И. А. Мальцев. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 380 с. — ISBN 978-5-8114-6834-8. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/153646>
7. Окунев, Л. Я. Высшая Линейная алгебра : учебник / Л. Я. Окунев. — 3-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 336 с. — ISBN 978-5-8114-0910-5. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/167769>
8. Фаддеев, Д. К. Лекции по алгебре : учебное пособие / Д. К. Фаддеев. — 7-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2020. — 416 с. — ISBN 978-5-8114-4867-8. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/126709>

## 7.3. Дополнительная литература

9. Гельфанд, И.М. Линейная алгебра : учебное пособие / И.М. Гельфанд, А. Шень. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : МЦНМО, 2009. — 14 с. — ISBN 978-5-94057-450-7. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система «Лань» : [сайт]. — URL: <https://e.lanbook.com/book/9322>
10. Новак Е.В. Высшая математика. Линейная алгебра [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Новак Е.В., Рязанова Т.В., Новак И.В.— Электрон. текстовые данные.— Екатеринбург: Уральский федеральный университет, ЭБС АСВ, 2015.— 116 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/69589.html>.— ЭБС «IPRbooks»
11. Высшая математика. Том 1. Линейная Линейная алгебра. Векторная Линейная алгебра. Аналитическая геометрия [Электронный ресурс]: учебник/ А.П. Господариков [и др.].— Электрон. текстовые данные.— СПб.: Национальный минерально-сырьевой университет «Горный», 2015.— 105 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/71687.html>.
12. Кошечев А.С. Линейная Линейная алгебра [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Кошечев А.С., Медведева М.А., Никонов О.И.— Электрон. текстовые данные.— Екатеринбург: Уральский федеральный университет, ЭБС АСВ, 2013.— 108 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/69618.html>.— ЭБС «IPRbooks»
13. Кочетова Ю.В. Линейная алгебра. Конечномерные пространства. Линейные операторы [Электронный ресурс]: курс лекций/ Кочетова Ю.В., Ширшова Е.Е.— Электрон. текстовые данные.— М.: Прометей, 2013.— 80 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/23973.html>.— ЭБС «IPRbooks»
14. Морозова Л.Е. Линейная Линейная алгебра. Часть 2 [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Морозова Л.Е., Полякова О.Р.— Электрон. текстовые данные.— СПб.: Санкт-

- Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, ЭБС АСВ, 2014.— 108 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/30007.html>
15. Березина Н.А. Линейная алгебра [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Березина Н.А.— Электрон. текстовые данные.— Саратов: Научная книга, 2012.— 126 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/6293.html>.— ЭБС «IPRbooks»
16. Линейная алгебра и аналитическая геометрия в примерах и задачах [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Р.Ф. Ахвердиев [и др.].— Электрон. текстовые данные.— Казань: Казанский национальный исследовательский технологический университет, 2009.— 89с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/63676.html>.— ЭБС «IPRbooks»
17. Войтенко, Т.Ю. Введение в алгебру. Задачи и решения : словарь / Т.Ю. Войтенко, Е.Н. Яковлева. — 2-е изд., стер. — Москва : ФЛИНТА, 2017. — 148 с. — ISBN 978-5-9765-2986-1. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система «Лань» : [сайт]. — URL: <https://e.lanbook.com/book/99126>
18. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре. С.-П.: Лань, 2005г.-416с.
19. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1977г.-288с.

#### 7.4.Периодические издания

20. Вестник МГУ Серия 1. Математика. Механика.
21. Известия РАН. Серия математическая.
22. Успехи математических наук.

#### 7.5.Интернет – ресурсы.

При изучении дисциплины «Линейная алгебра» обучающиеся обеспечены доступом (удаленный доступ) к ресурсам:

– общие информационные, справочные и поисковые:

23. Справочная правовая система «Гарант». URL: <http://www.garant.ru>.
24. Справочная правовая система «КонсультантПлюс». URL: <http://www.consultant.ru>
25. БиблиотекаКБГУ <http://lib.kbsu.ru>

#### **Перечень актуальных электронных информационных баз данных, к которым обеспечен доступ пользователям КБГУ**

№ п/п	Наименование электронного ресурса	Краткая характеристика	Адрес сайта	Наименование организации-владельца; реквизиты договора	Условия доступа
1.	<b>Научная электронная библиотека (НЭБ РФФИ)</b>	Электр. библиотека научных публикаций - около 4000 иностранных и 3900 отечественных научных журналов, рефераты публикаций 20 тыс. журналов, а также описания 1,5 млн. зарубежных и	<a href="http://elibrary.ru">http://elibrary.ru</a>	ООО «НЭБ»	Полный доступ

		российских диссертаций; 2800 росс. журналов на безвозмездной основе			
2.	<b>База данных Science Index (РИНЦ)</b>	Национальная информационно-аналитическая система, аккумулирующая более 6 миллионов публикаций российских авторов, а также информацию об их цитировании из более 4500 российских журналов.	<a href="http://elibrary.ru">http://elibrary.ru</a>	ООО «НЭБ» Лицензионный договор Science Index №SIO-741/2022 от 19.07.2022 г.  Активен до 31.07.2023г.	Авторизованный доступ. Позволяет дополнять и уточнять сведения о публикациях ученых КБГУ, имеющих в РИНЦ
3.	<b>«Электронная библиотека технического вуза» (ЭБС «Консультант студента»)</b>	Коллекция «Медицина (ВО) ГЭОТАР-Медиа. Books in English (книги на английском языке)»	<a href="http://www.studmedlib.ru">http://www.studmedlib.ru</a>	ООО «Политехресурс» (г. Москва) <b>Договор №701КС/02-2022</b> от 13.04.2022 г.  Активен до 19.04.2023г.	Полный доступ (регистрация по IP-адресам КБГУ)
4.	<b>ЭБС «Лань»</b>	Электронные версии книг ведущих издательств учебной и научной литературы (в том числе университетских издательств), так и электронные версии периодических изданий по различным областям знаний.	<a href="https://e.lanbook.com/">https://e.lanbook.com/</a>	ООО «ЭБС ЛАНЬ» (г. Санкт-Петербург) <b>Договор №6ЕП/223</b> от 15.02.2022 г.  Активен до 28.02.2023г.	Полный доступ (регистрация по IP-адресам КБГУ)
5.	<b>Национальная электронная библиотека РГБ</b>	Объединенный электронный каталог фондов российских библиотек, содержащий 4 331 542 электронных документов образовательного и научного характера по различным отраслям знаний	<a href="https://нэб.рф">https://нэб.рф</a>	ФГБУ «Российская государственная библиотека» Договор №101/НЭБ/1666-п от 10.09.2020г. Сроком на 5 лет	Доступ с электронного читального зала библиотеки КБГУ
6.	<b>ЭБС «IPRbooks»</b>	107831 публикаций, в т.ч.: 19071 – учебных изданий, 6746 – научных изданий, 700 коллекций, 343 журнала ВАК, 2085 аудиоизданий.	<a href="http://iprbookshop.ru/">http://iprbookshop.ru/</a>	ООО «Ай Пи Эр Медиа» (г. Саратов) <b>Договор №9200/22П</b> от 08.04.2022 г.  Активен до 02.04.2023г.	Полный доступ (регистрация по IP-адресам КБГУ)

7.	<b>Polpred.com. Новости. Обзор СМИ. Россия и зарубежье</b>	Обзор СМИ России и зарубежья. Полные тексты + аналитика из 600 изданий по 53 отраслям	<a href="http://polpred.com">http://polpred.com</a>	ООО «Полпред справочники» Безвозмездно (без официаль- ного договора)	Доступ по IP- адресам КБГУ
8.	<b>Президентская библиотека им. Б.Н. Ельцина</b>	Более 500 000 электронных документов по истории Отечества, русской государственности, русскому языку и праву	<a href="http://www.prilib.ru">http://www.prilib.ru</a>	ФГБУ «Президентская библиотека им. Б.Н. Ельцина» (г. Санкт- Петербург) <b>Соглашение от 15.11.2016г. бессрочный</b>	Авторизованный доступ из библиотеки (ауд. №115,214)

Кроме того обучающиеся могут воспользоваться профессиональными поисковыми системами:

26. Полнотекстовая база данных ScienceDirect: URL:<http://www.sciencedirect.com>.

27. Математическая интернет-библиотека URL: <https://math.ru/lib/cat/>

Для эффективного усвоения дисциплины, помимо учебного материала, студентам необходимо пользоваться данными всемирной сети Интернет, такими сайтами, как:

28. Математическая энциклопедия- PlanetMath.Org

29. Глоссарий по математике [http://www.glossary.ru/cgi-in/gl\\_sch2.cgi?RMgylsgyoqg](http://www.glossary.ru/cgi-in/gl_sch2.cgi?RMgylsgyoqg)

30. Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU <http://www.elibrary.ru>

31. Образовательный математический сайт URL: <http://www.exponenta.ru>

#### ***7.6. Методические указания по проведению различных учебных занятий и видов самостоятельной работы.***

Учебная работа по дисциплине «Линейная алгебра» состоит из контактной работы (лекции, практические занятия) и самостоятельной работы. Соотношение лекционных и практических занятий к общему количеству часов соответствует учебному плану программы специалитета 01.05.01 Фундаментальная математика и механика (Профиль: «Фундаментальная математика»). Для подготовки к практическим занятиям необходимо рассмотреть контрольные вопросы, при необходимости обратиться к рекомендуемой литературе, записать непонятные моменты в вопросах для уяснения их на предстоящем занятии.

#### ***Методические рекомендации по изучению дисциплины «Линейная алгебра» для обучающихся***

Приступая к изучению дисциплины, обучающемуся необходимо ознакомиться с тематическим планом занятий, списком рекомендованной учебной литературы. Следует уяснить последовательность выполнения индивидуальных учебных заданий, занести в свою рабочую тетрадь темы и сроки проведения семинаров. При изучении дисциплины обучающиеся выполняют следующие задания: изучают рекомендованную учебную и научную литературу; пишут контрольные работы; выполняют самостоятельные работы, участвуют в выполнении практических заданий. Уровень и глубина усвоения дисциплины зависят от активной и систематической работы на лекциях, изучения рекомендованной литературы, выполнения контрольных письменных заданий.

Курс изучается на лекциях, семинарах, при самостоятельной и индивидуальной работе обучающихся. Обучающийся для полного освоения материала должен не пропускать занятия и активно участвовать в учебном процессе. Лекции включают все темы и основные вопросы теории и практики. Для максимальной эффективности изучения необходимо постоянно вести конспект лекций, знать рекомендуемую

преподавателем литературу, позволяющую дополнить знания и лучше подготовиться к семинарским занятиям.

В соответствии с учебным планом на каждую тему выделено необходимое количество часов практических занятий. Обучающиеся должны регулярно готовиться к семинарским занятиям и участвовать в обсуждении вопросов. При подготовке к занятиям следует руководствоваться конспектом лекций и рекомендованной литературой. Тематический план дисциплины, учебно-методические материалы, а также список рекомендованной литературы приведены в рабочей программе

### ***Методические рекомендации при работе над конспектом во время проведения лекции***

В процессе лекционных занятий целесообразно конспектировать учебный материал. Для этого используются общие и утвердившиеся в практике правила, и приемы конспектирования лекций.

Конспектирование лекций ведется в специально отведенной для этого тетради, каждый лист которой должен иметь поля, на которых делаются пометки из рекомендованной литературы, дополняющие материал прослушанной лекции, а также подчеркивающие особую важность тех или иных теоретических положений.

Целесообразно записывать тему и план лекций, рекомендуемую литературу к теме. Записи разделов лекции должны иметь заголовки, подзаголовки, красные строки. Для выделения разделов, выводов, определений, основных идей можно использовать цветные ручки и фломастеры.

Названные в лекции ссылки на первоисточники надо пометить на полях, чтобы при самостоятельной работе найти и вписать их. В конспекте дословно записываются определения понятий. Остальное должно быть записано своими словами.

### ***Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям***

Практические (семинарские) занятия – составная часть учебного процесса, групповая форма занятий при активном участии студентов. Практические занятия способствуют углубленному изучению наиболее сложных проблем науки и служат основной формой подведения итогов самостоятельной работы обучающихся.

Целью практических занятий является углубление и закрепление теоретических знаний, полученных обучающимися на лекциях и в процессе самостоятельного изучения учебного материала, а, следовательно, формирование у них определенных умений и навыков.

В ходе подготовки к семинарскому занятию необходимо прочитать конспект лекции, изучить основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой, выполнить практические задания. При этом учесть рекомендации преподавателя и требования программы. Дорабатывать свой конспект лекции, делая в нем соответствующие записи из литературы.

Желательно при подготовке к практическим занятиям по дисциплине одновременно использовать несколько источников, раскрывающих заданные вопросы.

### ***Методические рекомендации по организации самостоятельной работы***

Самостоятельная работа обучающихся - способ активного, целенаправленного приобретения студентом новых для него знаний и умений без непосредственного участия в этом процесса преподавателей. Повышение роли самостоятельной работы обучающихся при проведении различных видов учебных занятий предполагает:

- оптимизацию методов обучения, внедрение в учебный процесс новых технологий обучения, повышающих производительность труда преподавателя, активное использование информационных технологий, позволяющих обучающемуся в удобное для него время осваивать учебный материал;
- внедрение компьютеризированного тестирования;

- совершенствование методики проведения практик и научно-исследовательской работы обучающихся, поскольку именно эти виды учебной работы в первую очередь готовят обучающихся к самостоятельному выполнению профессиональных задач.

Самостоятельная работа приводит студента к получению нового знания, упорядочению и углублению имеющихся знаний, формированию у него профессиональных навыков и умений. Самостоятельная работа выполняет ряд функций: развивающую, информационно-обучающую, ориентирующую и стимулирующую, воспитывающую, исследовательскую.

Студентам рекомендуется с самого начала освоения курса работать с литературой и предлагаемыми заданиями в форме подготовки к очередному аудиторному занятию. При освоении курса студент может пользоваться библиотекой вуза, которая в полной мере обеспечена соответствующей литературой. Самостоятельная работа студентов предусмотрена учебным планом и выполняется в обязательном порядке. Для успешного самостоятельного изучения материала используются различные средства обучения, среди которых особое место занимают информационные технологии разного уровня и направленности: электронные учебники и курсы лекций, базы тестовых заданий и задач. Для успешной организации самостоятельной работы все активнее применяются разнообразные образовательные ресурсы в сети Интернет: системы тестирования, виртуальные лекции, при этом пользователю достаточно иметь компьютер и подключение к Интернет.

Большое воспитательное и образовательное значение в самостоятельном учебном труде студента имеет самоконтроль. Самоконтроль возбуждает и поддерживает внимание и интерес, повышает активность памяти и мышления, позволяет студенту своевременно обнаружить и устранить допущенные ошибки и недостатки, объективно определить уровень своих знаний, практических умений. Самое доступное и простое средство самоконтроля с применением информационно-коммуникационных технологий - это ряд тестов «on-line», которые позволяют определить свой уровень владения предметным материалом, выявить свои ошибки и получить рекомендации по самосовершенствованию.

### ***Методические рекомендации по работе с литературой***

Всю литературу можно разделить на учебники и учебные пособия, оригинальные научные монографические источники, научные публикации в периодической печати. Из них можно выделить литературу основную, дополнительную и литературу для углубленного изучения дисциплины.

Изучение дисциплины следует начинать с учебника, поскольку учебник – это книга, в которой изложены основы научных знаний по определенному предмету в соответствии с целями и задачами обучения, установленными программой.

При работе с литературой необходимо учитывать, что имеются различные виды чтения, и каждый из них используется на определенных этапах освоения материала.

*Предварительное* чтение направлено на выявление в тексте незнакомых терминов и поиск их значения в справочной литературе. В частности, при чтении указанной литературы необходимо подробнейшим образом анализировать понятия.

*Сквозное чтение* предполагает прочтение материала от начала до конца. Сквозное чтение литературы из приведенного списка дает возможность студенту сформировать свод основных понятий из изучаемой области и свободно владеть ими.

*Выборочное* – наоборот, имеет целью поиск и отбор материала. В рамках данного курса выборочное чтение, как способ освоения содержания курса, должно использоваться при подготовке к практическим занятиям по соответствующим разделам.

*Аналитическое чтение* – это критический разбор текста с последующим его конспектированием.



Целью *изучающего* чтения является глубокое и всестороннее понимание учебной информации.

Подготовка к экзамену должна проводиться на основе лекционного материала, материала практических занятий с обязательным обращением к основным учебникам по курсу. Это позволит исключить ошибки в понимании материала, облегчит его осмысление, прокомментирует материал многочисленными примерами.

### ***Методические рекомендации для подготовки к экзамену***

Экзамен в 3-м семестре является формой итогового контроля знаний и умений обучающихся по данной дисциплине, полученных на лекциях, практических занятиях и в процессе самостоятельной работы. Основой для определения оценки служит уровень усвоения обучающимися материала, предусмотренного данной рабочей программой. К экзамену допускаются студенты, набравшие 36 и более баллов по итогам текущего и промежуточного контроля. На экзамене студент может набрать от 15 до 30 баллов.

В период подготовки к экзамену обучающиеся вновь обращаются к учебно-методическому материалу и закрепляют промежуточные знания.

При подготовке к экзамену обучающимся целесообразно использовать материалы лекций, учебно-методические комплексы, основную и дополнительную литературу. На экзамен выносится материал в объеме, предусмотренном рабочей программой учебной дисциплины за семестр. Экзамен проводится в письменной / устной форме.

При проведении экзамена в письменной (устной) форме, ведущий преподаватель составляет экзаменационные билеты, которые включают в себя: теоретические вопросы и задачи. Формулировка теоретических заданий совпадает с формулировкой перечня экзаменационных вопросов, доведенных до сведения обучающихся накануне экзаменационной сессии. Содержание вопросов одного билета относится к различным разделам программы с тем, чтобы более полно охватить материал учебной дисциплины.

На подготовку ответа на билет на экзамене отводится 40 минут. При проведении письменного экзамена на работу отводится 60 минут.

Результат устного (письменного) экзамена выражается оценками:

***Оценка «отлично» – от 91 до 100 баллов*** – теоретическое содержание курса освоено полностью, без пробелов, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы. Все предусмотренные программой обучения учебные задания выполнены. На экзамене студент демонстрирует глубокие знания предусмотренного программой материала, умеет четко и логически последовательно отвечать на поставленные вопросы.

***Оценка «хорошо» – от 81 до 90 баллов*** – теоретическое содержание курса освоено, необходимые практические навыки работы сформированы, выполненные учебные задания содержат незначительные ошибки. На экзамене студент демонстрирует знания основного (программного) материала, допускает неточности при ответе на поставленные вопросы.

***Оценка «удовлетворительно» – от 61 до 80 баллов*** – теоретическое содержание курса освоено не полностью, необходимые практические навыки работы сформированы частично, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. На экзамене студент демонстрирует знание только основного материала, ответы содержат неточности, нарушена последовательность изложения материала

***Оценка «неудовлетворительно» – от 36 до 60 баллов*** – теоретическое содержание курса не освоено, необходимые практические навыки работы не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки, дополнительная самостоятельная работа над материалом курса не приведет к существенному повышению качества выполнения учебных заданий. На экзамене студент демонстрирует незнание значительной части программного материала, существенные ошибки в ответах на вопросы, неумение ориентироваться в материале, незнание основных понятий дисциплины



## **8. Материально-техническое обеспечение дисциплины**

### **8.1. Требования к материально-техническому обеспечению**

Для реализации рабочей программы дисциплины имеются специальные помещения для проведения занятий лекционного и семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы и помещения для хранения и обслуживания оборудования. Специальные помещения укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления информации большой аудитории.

Для проведения занятий лекционного типа имеются демонстрационное оборудование.

При проведении занятий лекционного/ семинарского типа используются:

*лицензионное программное обеспечение:*

- программное обеспечение средств антивирусной защиты Kaspersky Endpoint Security для бизнеса - Стандартный Russian Edition. 1000-1500 Node 1 year Educational Renewal License (KL4863RAVFQ);

- программное обеспечение для работы с PDF-документами. ABBYY FineReader 15 Business.

- программное обеспечение для работы с документами формата PDF Acrobat Pro DC for teams ALL Multiple Platforms Multi European Languages Level 1 (1-9) Education Named License 65297997BB01A12

- офисное программное обеспечение МойОфис Стандартный

*свободно распространяемые программы:*

- Web Browser – Firefox;
- AcademicMarthCADLicense - математическое программное обеспечение, которое позволяет выполнять, анализировать важнейшие инженерные расчеты и обмениваться ими;
- 7zip - программ для сжатия и распаковки файлов;
- AdobeReader– программа для чтения PDF файлов;
- DjvuReader – приложения для распознавания, конвентирования и работы с Djvu файлами.

### **8.2 Особенности реализации дисциплины для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья**

Для студентов с ограниченными возможностями здоровья созданы специальные условия для получения образования. В целях доступности получения высшего образования по образовательным программам инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья университетом обеспечивается:

1. Альтернативная версия официального сайта в сети «Интернет» для слабовидящих;

2. Для инвалидов с нарушениями зрения (слабовидящие, слепые) - присутствие ассистента, оказывающего обучающемуся необходимую помощь, дублирование вслух справочной информации о расписании учебных занятий; наличие средств для усиления остаточного зрения, брайлевской компьютерной техники, видеоувеличителей, программ не визуального доступа к информации, программ-синтезаторов речи и других технических средств приема-передачи учебной информации в доступных формах для студентов с нарушениями зрения;

3. Для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья по слуху (слабослышащие, глухие) – звукоусиливающая аппаратура, мультимедийные средства и другие технические средства приема-передачи учебной информации в доступных формах;

4. Для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья, имеющих нарушения опорно-двигательного аппарата, созданы материально-технические условия обеспечивающие возможность беспрепятственного доступа обучающихся в учебные помещения, объекту питания, туалетные и другие помещения университета, а также пребывания в указанных помещениях (наличие расширенных дверных проемов, поручней и других приспособлений).

Обучающиеся из числа лиц с ограниченными возможностями здоровья обеспечены электронными образовательными ресурсами в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья.

Обучающимся с ограниченными возможностями здоровья предоставляются специальные учебники и учебные пособия, иная учебная литература, специальные технические средства обучения коллективного и индивидуального пользования, предоставление услуг ассистента (помощника), оказывающего обучающимся необходимую техническую помощь, а также услуги сурдопереводчиков и тифлосурдопереводчиков.

а) для слабовидящих:

- на экзамене присутствует ассистент, оказывающий студенту необходимую техническую помощь с учетом индивидуальных особенностей (он помогает занять рабочее место, передвигаться, прочитать и оформить задание, в том числе записывая под диктовку);

- задания для выполнения, а также инструкция о порядке проведения зачете/экзамена оформляются увеличенным шрифтом;

- задания для выполнения на экзамене зачитываются ассистентом;

- письменные задания выполняются на бумаге, надиктовываются ассистенту;

- обеспечивается индивидуальное равномерное освещение не менее 300 люкс;

- студенту для выполнения задания при необходимости предоставляется увеличивающее устройство;

в) для глухих и слабослышащих:

- на зачете/экзамене присутствует ассистент, оказывающий студенту необходимую техническую помощь с учетом индивидуальных особенностей (он помогает занять рабочее место, передвигаться, прочитать и оформить задание, в том числе записывая под диктовку);

- зачет/экзамен проводится в письменной форме;

- обеспечивается наличие звукоусиливающей аппаратуры коллективного пользования, при необходимости поступающим предоставляется звукоусиливающая аппаратура индивидуального пользования;

- по желанию студента экзамен может проводиться в письменной форме;

д) для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата (тяжелыми нарушениями двигательных функций верхних конечностей или отсутствием верхних конечностей):

- письменные задания выполняются на компьютере со специализированным программным обеспечением или надиктовываются ассистенту;

- по желанию студента экзамен проводится в устной форме.

## ЛИСТ ИЗМЕНЕНИЙ (ДОПОЛНЕНИЙ)

в рабочую программу по дисциплине «Линейная алгебра»  
по программе специалитета 01.05.01 Фундаментальная математика и механика  
(Профиль: «Фундаментальная математика») на \_\_\_\_\_ учебный год

№п/п	Элемент (пункт) РПД	Перечень вносимых изменений (дополнений)	Примечание

Обсуждена и рекомендована на заседании кафедры алгебры и дифференциальных уравнений протокол № \_\_\_\_ от " \_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_ /

## Распределение баллов текущего и рубежного контроля

№ п/п	Вид контроля	Сумма баллов			
		Общая сумма	1-я точка	2-я точка	3-я точка
1.	Посещение занятий	до 10 баллов	до 3 б.	до 3б.	до 4б.
2.	Текущий контроль:	до 30 баллов	до 10 б.	до 10 б.	до 10б.
	Ответ на 5 вопросов	от 0 до 15 б.	от 0 до 5б.	от 0 до 5 б.	от 0 до 5б.
	Полный правильный ответ	до 15 баллов	5 баллов	5 баллов	5 баллов
	Неполный правильный ответ	от 3 до 15 б.	от 1 до 5б.	от 1 до 5б.	от 1 до 5б.
	Ответ, содержащий неточности, ошибки	0б.	0б.	0б.	0б.
	Выполнение самостоятельных заданий (решение задач)	от 0 до 10б.	от 0 до 3б.	от 0 до 3б.	от 0 до 4б.
3.	Рубежный контроль	до 30 баллов	до 10 б.	до 10 б.	до 10 б.
	тестирование	от 0 до 15б.	от 0 до 5б.	от 0 до 5б.	от 0 до 5б.
	коллоквиум	от 0 до 15б.	от 0 до 5б.	от 0 до 5 б.	от 0 до 5б.
4.	Итого сумма текущего и рубежного контроля	до 70баллов	до 23баллов	до 23баллов	до 24баллов
5.	Первый этап (базовый)уровень) – оценка «удовлетворительно»	не менее 36б.	не менее 12б.	не менее 12б.	не менее 12б.
6.	Второй этап (продвинутый)уровень) – оценка «хорошо»	менее 70б. (51-69 б.)	менее 23б.	менее 23б.	менее 24б.
7.	Третий этап (высокий уровень) - оценка «отлично»	не менее 70б.	не менее 23б.	не менее 23б.	не менее 24б.

**Шкала оценивания планируемых результатов обучения****Текущий и рубежный контроль**

Семестр	Шкала оценивания			
	0-35 баллов	36-50 баллов	51-60 баллов	61-70 баллов
3	Частичное посещение аудиторных занятий. Неудовлетворительное выполнение практических работ. Плохая подготовка к балльно-рейтинговым мероприятиям. Студент не допускается к промежуточной аттестации	Полное или частичное посещение аудиторных занятий. Частичное выполнение практических работ. Выполнение контрольных работ, тестовых заданий, ответы на коллоквиуме на оценку «удовлетворительно».	Полное или частичное посещение аудиторных занятий. Полное выполнение практических работ. Выполнение контрольных работ, тестовых заданий, ответы на коллоквиуме на оценку «хорошо».	Полное посещение аудиторных занятий. Полное выполнение практических работ. Выполнение контрольных работ, тестовых заданий, ответы на коллоквиуме на оценку «отлично».

**Промежуточная аттестация**

Семестр	Шкала оценивания			
	Неудовлетворительно (36-60 баллов)	Удовлетворительно (61-80 баллов)	Хорошо (81-90 баллов)	Отлично (91-100 баллов)
3	Студент имеет 36-60 баллов по итогам текущего и рубежного контроля, на экзамене не дал полного ответа ни на один вопрос, не сделал пример. Студент имеет 36-45 баллов по итогам текущего и рубежного контроля, на экзамене дал полный ответ только на один	Студент имеет 36-50 баллов по итогам текущего и рубежного контроля, на экзамене дал полный ответ на один вопрос и частично (полностью) ответил на второй, а пример сделан не верно. Студент имеет 46-60 баллов по итогам текущего и рубежного контроля, на	Студент имеет 51-60 баллов по итогам текущего и рубежного контроля, на экзамене дал полный ответ на один вопрос и частично (полностью) ответил на второй. Пример сделан верно. Студент имеет 61 – 65 баллов по итогам текущего и рубежного контроля, на	Студент имеет 61-70 баллов по итогам текущего и рубежного контроля, на экзамене дал полный ответ на один вопрос и частично (полностью) ответил на второй, и пример сделан правильно. Или же студент на оба вопроса ответил верно, а в задаче, есть

	вопрос, а пример сделан неправильно.	экзамене дал полный ответ на один вопрос или частично ответил на оба вопроса, а пример не сделан. Студент имеет по итогам текущего и рубежного контроля 61-70 баллов на экзамене не дал полного ответа ни на один вопрос. В решении примера есть грубая ошибка, которая повлияла на ответ, вследствие чего пример сделан не верно	экзамене дал полный ответ на один вопросы частично ответил на второй, и в примере есть недочеты, которые не повлияли на ответ. Студент имеет 66-70 баллов по итогам текущего и рубежного контроля, на экзамене дал полный ответ только на один вопрос. В примере есть неточности, которые не повлияли на ответ.	неточности, которые не повлияли на ответ.
--	--	--	--	--